Univerzitet u Zenici
Pedagoški fakultet
Matematika i informatika

Diferencijalna geometrija

(akademska 2012/2013.)

1. dio

Literatura za dodatno usavršavanje i napredovanje:

- Diferencijalna geometrija (zbirka zadataka i repetitorij); Branka Žarinac-Frančula
- Zbirka riješenih zadatak iz Matematike II; Perić, Tomić; Karačić.
- Zbirka riješenih zadatak iz Matematike; Ferenci; Ungar; Čomić; Cvjetanović; Uzelac.
- http://www.frontslobode.org/vedad/DifGeo/index.html

Dio tablice izvoda

1) $(c)' = 0$;
2) $(u+v-w)' = u' + v' - w'$;
3) $(uv)' = u'v + v'u$;
3a) $(cu)' = cu'$;
4) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$;
4a) $\left(\frac{u}{c}\right)' = \frac{u'}{c}$;
4б) $\left(\frac{c}{v}\right)' = -\frac{cv'}{v^2}$;
5) $(x^n)' = nx^{n-1}$;
6) $(\sin x)' = \cos x$;
7) $(\cos x)' = -\sin x$;
8) $(\operatorname{tg} x)' = \sec^2 x$;
9) $(\operatorname{ctg} x)' = -\operatorname{cosec}^2 x$.

5) $(u^n)' = nu^{n-1} \cdot u'$;
6) $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$;
7) $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$;
8) $(\operatorname{tg} u)' = \sec^2 u \cdot u'$;
9) $(\operatorname{ctg} u)' = -\operatorname{cosec}^2 u \cdot u'$.

10) $(a^u)' = a^u \ln a \cdot u'$;
11) $(\log u)' = \frac{u'}{u} \log e$;
10a) $(e^u)' = e^u u'$;
11a) $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$;
10б) $(a^x)' = a^x \ln a$;
11б) $(\log x)' = \frac{1}{x} \log e$;
10в) $(e^x)' = e^x$;
11в) $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

12) $(\arcsin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$;
12a) $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
13) $(\arccos u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$;
13a) $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
14) $(\operatorname{arc\,tg} u)' = \frac{u'}{1+u^2}$;
14a) $(\operatorname{arc\,tg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$;
15) $(\operatorname{arc\,ctg} u)' = -\frac{u'}{1+u^2}$;
15a) $(\operatorname{arc\,ctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$.

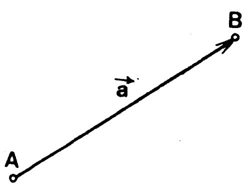
Dio tablice integrala

1. $\int u^a\,du = \frac{u^{a+1}}{a+1} + C, \quad a \neq -1.$
2. $\int u^{-1}\,du = \int \frac{du}{u} = \int \frac{u'}{u}\,dx = \ln|u| + C.$
3. $\int a^u\,du = \frac{a^u}{\ln a} + C; \quad \int e^u\,du = e^u + C.$
4. $\int \sin u\,du = -\cos u + C.$
5. $\int \cos u\,du = \sin u + C.$
6. $\int \sec^2 u\,du = \operatorname{tg} u + C.$
7. $\int \operatorname{cosec}^2 u\,du = -\operatorname{ctg} u + C.$
8. $\int \frac{du}{u^2+a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arc\,tg} \frac{u}{a} + C.$
9. $\int \frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C.$
10. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \arcsin \frac{u}{a} + C.$
11. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2+a}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2+a}\right| + C.$

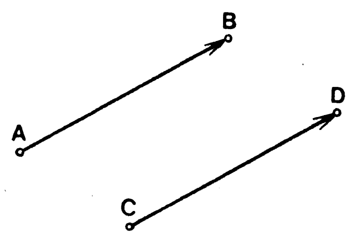
§ 1. Osnovni pojmovi vektorske algebre

1.1. Pojam vektora

Dužina $\overline{AB}$ kod koje su krajevi A i B uređeni, tj. jedna od točaka proglašena je za početak (hvatište), a druga za svršetak (kraj, šiljak) zove se *usmjerena dužina* ili *vektor*. Vektor kojemu je A početak a B kraj označujemo s $\overrightarrow{AB}$ i taj vektor skiciramo kao na pripadnoj sl.1. Vektore također označujemo i s $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c},\ldots$ itd. Udaljenost točaka A i B zovemo *duljina, norma* ili *modul* vektora $\overrightarrow{AB}$. Normu vektora $\overrightarrow{AB}$ označujemo s $|\overrightarrow{AB}|$, odnosno vektora $\vec{a}$ sa $|\vec{a}|$. Vektor modula 1 zovemo *jediničnim vektorom* i označujemo sa $\vec{a}^0$. Pravac AB zovemo *nosiocem* vektora $\overrightarrow{AB}$ i za taj vektor kažemo da ima *smjer* od A prema B. Za dva vektora $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{CD}$ kažemo da su *jednaki* i pišemo $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ ako postoji translacija prostora koja točku A prevodi u C i istovremeno točku B u D (vidi sl.2). Jasno je da jednaki vektori imaju jednake module i iste smjerove. Za dva vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ kažemo da su *kolinearni* ako oni imaju isti nosilac.

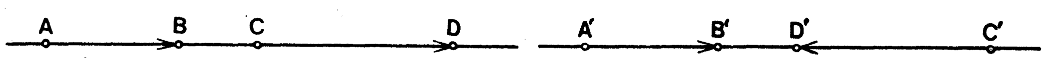


Sl. 1.



Sl. 2.

Na pripadnoj sl. 3. prikazani su kolinearni vektori $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{CD}$ i oni su istog



Sl. 3.

smjera. Vektori $\overrightarrow{A'B'}$ i $\overrightarrow{C'D'}$ su također kolinearni ali suprotnog smjera.

Kolinearnim vektorima smatramo također i vektore kojima su nosioci paralelni.

1.2. Množenje vektora realnim brojem. Zbrajanje vektora. Linearna kombinacija vektora.

a) Neka je $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ bilo koji vektor i $\lambda > 0$ bilo koji realni broj (skalar). Tada znamo da na pravcu AB postoji jedinstvena točka C takva da je

$$\lambda \overline{AB} = \overline{AC} \tag{1}$$

i da su vektori $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$ istog smjera (vidi sl.4). Tako dobiveni vektor $\vec{b}$ zovemo *produktom skalara* λ *i vektora* $\vec{a}$ i pišemo:

$$\vec{b} = \lambda \vec{a}.$$

Sl. 4.

Na isti način za $\lambda < 0$ i bilo koji vektor $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ postoji jedinstvena točka C na pravcu AB takva da vrijedi (1) i da su vektori $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$ suprotnog smjera (sl. 5). Vektor $\vec{b}$ zovemo produktom skalara λ i vektora $\vec{a}$ i pišemo:

$$\vec{b} = \lambda \vec{a}.$$

Sl. 5.

Specijalno vektor $\vec{a} = (-1)\,\vec{a}$ označujemo s $-\vec{a}$ i zovemo suprotnim od $\vec{a}$.

Napokon za $\lambda = 0$ i svaki vektor $\vec{a}$ stavljamo $0\,\vec{a} = \vec{0}$, gdje smo s $\vec{0}$ označili *nul-vektor*. To je vektor kojemu početak i kraj padaju u istu točku. Uzima se da je nul-vektor kolinearan sa svakim vektorom.

Množenje vektora skalarom je asocijativno s obzirom na skalarni faktor, tj. vrijedi uvijek:

$$\lambda(\mu \vec{a}) = (\lambda \mu)\vec{a}.$$

Jediničnim vektorom u smjeru vektora $\vec{a}$ zovemo vektor

$$\vec{a}^{\,0} = \frac{1}{|\vec{a}|}\,\vec{a}.$$

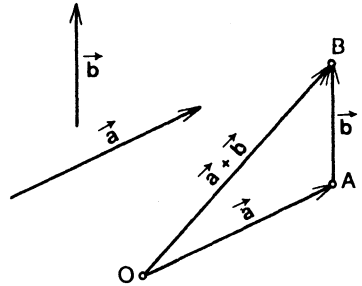
b) *Operacija zbrajanja vektora* uvodi se ovako:

Neka su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ bilo koja dva vektora. Uzmimo u prostoru bilo koju točku O i translatirajmo vektor $\vec{a}$ tako da mu početak padne u O, a vektor $\vec{b}$ tako da mu početak padne u kraj A translatiranog vektora $\vec{a}$.

Označimo s B kraj translatiranog vektora $\vec{b}$. Vektor $\vec{c} = \overrightarrow{OB}$ zovemo tada *zbrojem vektora* $\vec{a}$ i $\vec{b}$ i pišemo (sl. 6):

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}.$$

Zbroj $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ možemo shvatiti i kao »prvu« dijagonalu paralelograma kojeg određuju na prije opisani način translatirani vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$. Tako definirano zbrajanje vektora ima ova svojstva:



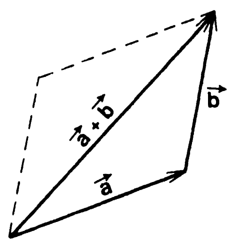
Sl. 6.

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}), \text{ (asocijativnost)}$$
$$\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a},$$
$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}, \qquad \text{(komutativnost).}$$

Za vektore $\vec{a}$ i $\vec{b}$ definira se njihova *razlika:*

$$\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$$

ovako: $\quad \vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}).$

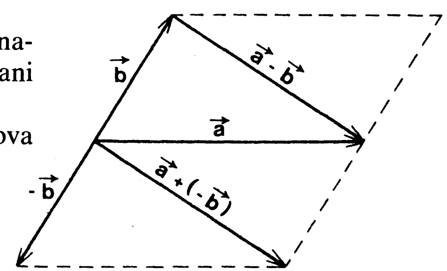


Sl. 7.

Razlika $\vec{a} - \vec{b}$ predočena je »drugom« dijagonalom paralelograma kojeg određuju translatirani vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ (sl. 8).

Množenje vektora sa skalarima ima ova svojstva distributivnosti:

$$\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b},$$
$$(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}.$$



Sl. 8.

c) Za vektore $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ i skalare $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ potpuno je određen vektor

$$\vec{b} = \lambda_1\vec{a}_1 + \dots + \lambda_n\vec{a}_n.$$

Vektor $\vec{b}$ zovemo *linearnom kombinacijom* ili *linearnim spojem* vektora $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$. Za vektore $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ kažemo da su *linearno zavisni* ako postoje skalari $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ od kojih je barem jedan različit od nule tako da vrijedi:

$$\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \dots + \lambda_n\vec{a}_n = \vec{0}. \tag{2}$$

Vektori $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ su *linearno nezavisni* ako (2) povlači $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$.

Na primjer: Svaka četiri vektora u prostoru su linearno zavisna. Svaka tri vektora u ravnini su linearno zavisna.

1.3. Koordinate vektora

Neka je O bilo koja točka prostora. Tada svakoj toči T prostora možemo pridružiti vektor $\overrightarrow{OT}$. Taj vektor zovemo radijvektorom točke T. Neka su dalje $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ linearno nezavisni vektori s početkom u O, tada postoji i jedinstven je rastav:

$$\overrightarrow{OT} = t^1\vec{e}_1 + t^2\vec{e}_2 + t^3\vec{e}_3. \tag{3}$$

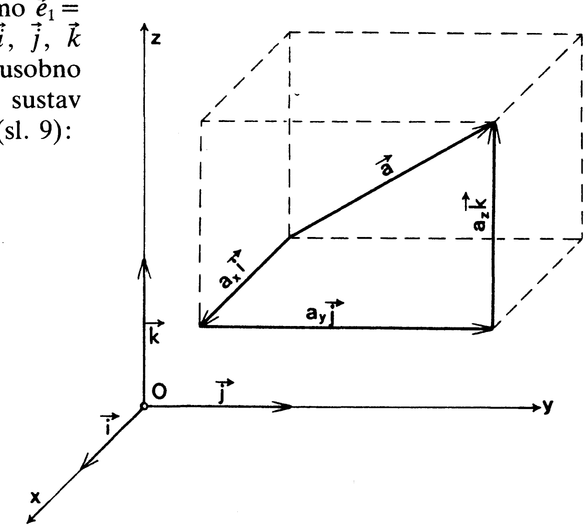
Skup $\{O;\ \vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3\}$ zovemo *afinim ili kosokutnim koordinatnim sustavom u prostoru,* a uređenu trojku (t^1, t^2, t^3) *afinim ili kosokutnim koordinatama točke T* ili radijvektora $\overrightarrow{OT}$ ili bilo kojeg vektora koji je jednak vektoru $\overrightarrow{OT}$ u tom sustavu. To pišemo ovako $T = (t^1, t^2, t^3)$. Specijalni slučaj afinih koordinata jesu *Descartesove pravokutne koordinate.*

Njih dobivamo tako da uzmemo $\vec{e}_1 = \vec{i}$, $\vec{e}_2 = \vec{j}$, $\vec{e}_3 = \vec{k}$, gdje su $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ jedinični vektori koji su međusobno ortogonalni i koji čine desni sustav vektora. Tada rastav (3) glasi (sl. 9):

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}.$$

Ovo se još piše ovako:

$$\vec{a}(a_x, a_y, a_z), \text{ ili}$$
$$\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}.$$



Sl. 9.

Uređenu trojku (a_x, a_y, a_z) zovemo pravokutnim ili Descartesovim koordinatama vektora $\vec{a}$.

Do sada definirane operacije s vektorima u koordinatama izgledaju ovako: Neka su zadani vektori $\vec{a}(a_x, a_y, a_z)$ i $\vec{b}(b_x, b_y, b_z)$. Tada je:

$$\vec{a} \pm \vec{b} = (a_x \pm b_x)\vec{i} + (a_y \pm b_y)\vec{j} + (a_z \pm b_z)\vec{k},$$
$$\lambda\vec{a} = \lambda a_x\vec{i} + \lambda a_y\vec{j} + \lambda a_z\vec{k}.$$

Ako su zadane točke $A = (x_1, y_1, z_1)$ i $B = (x_2, y_2, z_2)$ tada je vektor $\overrightarrow{AB}$:

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}$$

ili kraće:

$$\overrightarrow{AB}\ (x_2 - x_1,\ y_2 - y_1,\ z_2 - z_1).$$

1.4. Produkti vektora – produkt od dva vektora

a) *Skalarni produkt vektora* (ili unutarnji ili in produkt). Skalarni produkt vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ (označuje se s $\vec{a}\cdot\vec{b}$) jest skalar, definiran jednadžbom:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\;|\vec{b}|\cos\phi,$$

gdje je ϕ kut između vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ dovedenih u isti početak, i $0\leqslant\phi\leqslant\pi$.

b) *Svojstva skalarnog produkta*

$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$ (zakon komutacije),

$\alpha(\vec{a}\cdot\vec{b})=(\alpha\vec{a})\cdot\vec{b}$ (zakon asocijativnosti s obzirom na skalarni faktor α).

Uočite da ne vrijedi relacija:

$$\vec{a}(\vec{b}\cdot\vec{c})=(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}.$$

Naime, na lijevoj strani vektor je kolinearan s $\vec{a}$ (oblika $\alpha\vec{a}$), a na desnoj strani vektor je kolinearan s $\vec{c}$ (oblika $\gamma\vec{c}$). Zato je nužno staviti zagradu, jer izraz oblika $\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}$ nije određen, tj. ne znamo mu ni smjer ni smisao niti iznos. Dalje vrijedi:

$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$ (zakon distribucije za skalarno
$(\vec{b}+\vec{c})\cdot\vec{a}=\vec{b}\cdot\vec{a}+\vec{c}\cdot\vec{a}$ množenje prema zbrajanju),
$\vec{a}\cdot\vec{b}=0\Leftrightarrow\vec{a}\perp\vec{b}$ ili $\vec{a}=\vec{0}$ ili $\vec{b}=\vec{0}$.

Za $\vec{a}\cdot\vec{a}$ upotrebljava se kraća oznaka $\vec{a}^2$. Očito vrijedi:

$$|\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}^2}.$$

c) *Vektorski produkt vektora* (ili vanjski ili eks-produkt). Vektorski produkt vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ (označuje se s $\vec{a}\times\vec{b}$) jest vektor $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$, čiji je modul $|\vec{c}|=|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}|\;|\vec{b}|\sin\phi$ (tj. čiji je modul jednak ploštini paralelograma nad vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$ kao stranicama), nadalje čiji je pravac okomit na $\vec{a}$ i $\vec{b}$, a smjer je određen zahtjevom da tri vektora $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{a}\times\vec{b}$ čine desni sustav (tj. tako da je najkraća rotacija od $\vec{a}$ prema $\vec{b}$ za promatrača, koji promatra s kraja vektora $\vec{c}$ protivna rotaciji kazaljke na satu).

d) Svojstva vektorskog produkta

$\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$ (zakon antikomutativnosti; pri zamjeni faktora vektorski produkt mijenja smjer),

$\alpha(\vec{a}\times\vec{b})=(\alpha\vec{a})\times\vec{b}=\vec{a}\times(\alpha\vec{b})=\alpha\vec{a}\times\vec{b}$ (zakon asocijativnosti s obzirom na skalarni faktor α),

$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})\neq(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$ (zakon asocijativnosti za vektorsko množenje tri vektora ne vrijedi (vidi 1.5.d.). Naime, na lijevoj strani vektor je komplanaran s $\vec{b}$ i $\vec{c}$, a na desnoj vektor komplanaran s $\vec{a}$ i $\vec{b}$, pa je stoga nužno staviti zagradu kod vektorsko-vektorskog produkta.

$\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$ (zakon distribucije vektorskog množenja
$(\vec{b}+\vec{c})\times\vec{a}=\vec{b}\times\vec{a}+\vec{c}\times\vec{a}$ prema zbrajanju)
$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}\Leftrightarrow\vec{a}\,||\,\vec{b}$ (uvjet kolinearnosti, paralelnosti vektora).

Očito vrijedi:

$$\vec{a}\times\vec{a}=\vec{0}\quad\text{i}\quad\vec{0}\times\vec{a}=\vec{a}\times\vec{0}=\vec{0}.$$

1.5. Trostruki produkti vektora

a) *Vektorsko-skalarni produkt* (ili mješoviti produkt, ili eks-in produkt) triju vektora $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ jest skalarni produkt vektorskog produkta $\vec{a}\times\vec{b}$ s vektorom $\vec{c}$, tj.:

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}.$$

Kraće se ovo označuje s $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ i zove *trojka vektora.*

Geometrijski: Trojka vektora jednaka je po apsolutnom iznosu volumenu paralelepipeda razapetog vektorima $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ i s predznakom + ili − već prema tome čine li ti vektori (redom kako dolaze u vektorsko-skalarnom produktu) desni ili lijevi sustav:

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\pm V.$$

b) Trojka ne mijenja vrijednost ako joj ciklički permutiramo faktore ili ako zamijenimo znakove »×« i »·« (uz pomak zagrade):

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=(\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a}=(\vec{c}\times\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})=$$
$$=\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=\vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a}).$$

Ostale permutacije, koje nisu cikličke, svode se na permutaciju faktora u vektorskom produktu i mijenjaju predznak:

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=-(\vec{b}\times\vec{a})\cdot\vec{c}.$$

Vektori $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ su komplanarni ako je:

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=0.$$

Zbog komplanarnosti je npr.:

$$\vec{a}\cdot(\vec{a}\times\vec{c})=\vec{b}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=\vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{c})=\vec{c}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=0.$$

c) *Vektorsko-vektorski produkt* (ili eks-eks produkt) triju vektora $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ jest vektorski produkt vektorskog produkta $\vec{a}\times\vec{b}$ s vektorom $\vec{c}$, tj.:

$$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}.$$

Geometrijski: Ovo je vektor okomit na vektor $\vec{a}\times\vec{b}$ i na vektor $\vec{c}$, prema tome vektorsko-vektorski produkt $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$ je vektor koji leži u ravnini određenoj vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$. Dakle: Vektorsko-vektorski produkt jest vektor koji je komplanaran s vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

d) *Svojstva vektorsko-vektorskog produkta:*

Za vektorsko-vektorski produkt vrijedi:

$$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}=\vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{c})-\vec{a}(\vec{b}\cdot\vec{c})$$
$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=\vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{c})-\vec{c}(\vec{a}\cdot\vec{b}).$$

Pravilo: Vektorsko-vektorski produkt triju vektora je razlika dvaju vektora (kolinearnih s vektorima u zagradi), od kojih je prvi produkt »srednjeg« vektora sa skalarnim produktom »krajnjih« vektora, a drugi vektor produkt »drugog« vektora iz zagrade sa skalarnim produktom preostala dva vektora.

Svojstva vektorsko-vektorskog produkta: Veoma je važan redoslijed vektora u vektorsko-vektorskom produktu. Ciklička permutacija dovodi do posve različitih vektora:

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b}),$$
$$\vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c}(\vec{b} \cdot \vec{a}) - \vec{a}(\vec{b} \cdot \vec{c}),$$
$$\vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{a}(\vec{c} \cdot \vec{b}) - \vec{b}(\vec{c} \cdot \vec{a}).$$

Analogno i primjena mjesta zagrade u gornja tri produkta izaziva promjenu, jer ne vrijedi zakon asocijativnosti:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{b}(\vec{c} \cdot \vec{a}) - \vec{a}(\vec{c} \cdot \vec{b}),$$
$$(\vec{b} \times \vec{c}) \times \vec{a} = \vec{c}(\vec{b} \cdot \vec{a}) - \vec{b}(\vec{c} \cdot \vec{a}),$$
$$(\vec{c} \times \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a}(\vec{c} \cdot \vec{b}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b}),$$

pa je npr.:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} \neq \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}).$$

Ovo znači da zakon asocijativnosti za vektorsko množenje ne vrijedi. Iz navedenog slijedi:

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{0}.$$

Ova jednadžba zove se Jacobiev identitet.

Vektorsko-vektorski produkt možemo zapisati i pomoću determinante:

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \begin{vmatrix} \vec{b} & \vec{c} \\ (\vec{a} \cdot \vec{b}) & (\vec{a} \cdot \vec{c}) \end{vmatrix}.$$

1.6. Višestruki produkti vektora. Gramova determinanta

a) *Skalarni produkt vektorskih produkata od po dva vektora.*

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\,(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d})\,(\vec{b} \cdot \vec{c}) = \begin{vmatrix} (\vec{a} \cdot \vec{c}) & (\vec{b} \cdot \vec{c}) \\ (\vec{a} \cdot \vec{d}) & (\vec{b} \cdot \vec{d}) \end{vmatrix}.$$

b) *Vektorski produkt vektorskih produkata od po dva vektora.*

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{c} \times \vec{d}) = \vec{b}(\vec{a}, \vec{c}, \vec{d}) - \vec{a}(\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}),$$
$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{c} \times \vec{d}) = \vec{c}(\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}) - \vec{d}(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}).$$

Vektori na desnoj strani ovih jednakosti su jednaki, jedino je u prvom slučaju rezultat vektor komplanaran s ravninom određenom vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$ (rastav na »razliku« vektora $\vec{b}$ i $\vec{a}$ ili rastav »po $\vec{b}$ i $\vec{a}$«), a u drugom vektor komplanaran s ravninom određenom vektorima $\vec{c}$ i $\vec{d}$ (rastav na »razliku« vektora $\vec{c}$ i $\vec{d}$ ili rastav »po $\vec{c}$ i $\vec{d}$«). Odavde izlazi da je vektor $(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{c} \times \vec{d})$ paralelan s presječnicom ravnine vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ i ravnine vektora $\vec{c}$ i $\vec{d}$.

Izrazi u zagradama su skalari – trojke vektora.

c) *Vektorski produkt vektora s vektorsko-vektorskim produktom triju vektora.*

$$\vec{a} \times [\vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{d})] = (\vec{b} \cdot \vec{d})\,(\vec{a} \times \vec{c}) - (\vec{b} \cdot \vec{c})\,(\vec{a} \times \vec{d}).$$

d) *Produkt od šest vektora* – produkt trojke vektora s trojkom vektora:

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})\,(\vec{p}, \vec{q}, \vec{s}) = \begin{vmatrix} (\vec{a} \cdot \vec{p}) & (\vec{a} \cdot \vec{q}) & (\vec{a} \cdot \vec{s}) \\ (\vec{b} \cdot \vec{p}) & (\vec{b} \cdot \vec{q}) & (\vec{b} \cdot \vec{s}) \\ (\vec{c} \cdot \vec{p}) & (\vec{c} \cdot \vec{q}) & (\vec{c} \cdot \vec{s}) \end{vmatrix}.$$

Dokaz jednakosti pod a), b), c) i d) vidi u zadacima 5, 6, 7. i 8. na str. 12. i 13.

e) *Gramova determinanta*

Gramovom determinantom $G(\vec{a}, \vec{b})$ vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ zovemo determinantu:

$$G(\vec{a}, \vec{b}) = \begin{vmatrix} (\vec{a} \cdot \vec{a}) & (\vec{a} \cdot \vec{b}) \\ (\vec{b} \cdot \vec{a}) & (\vec{b} \cdot \vec{b}) \end{vmatrix}.$$

Za tri vektora $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ Gramova se determinanta $G(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ definira s:

$$G(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} (\vec{a} \cdot \vec{a}) & (\vec{a} \cdot \vec{b}) & (\vec{a} \cdot \vec{c}) \\ (\vec{b} \cdot \vec{a}) & (\vec{b} \cdot \vec{b}) & (\vec{b} \cdot \vec{c}) \\ (\vec{c} \cdot \vec{a}) & (\vec{c} \cdot \vec{b}) & (\vec{c} \cdot \vec{c}) \end{vmatrix}.$$

Iz d) i e) proizlazi da je:

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})^2 = G(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}).$$

Svojstva Gramove determinante navedena su u zadacima od 21. do 28.

1.7. Vektori u pravokutnim (Descartesovim) koordinatama

a) *Skalarni produkt dvaju vektora.* Ako su vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ dani svojim koordinatama $\vec{a}\,(a_x, a_y, a_z)$ i $\vec{b}\,(b_x, b_y, b_z)$, skalarni produkt je dan s:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z,$$

jer vrijedi:

$\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1$, $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{j} \cdot \vec{k} = 0$ i vektori $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, čine desni sustav vektora.

Posljedice:

Modul vektora: $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$

Iz 1.4. a) proizlazi:

Kut između dvaju vektora:

$$\cos \phi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}$$

Odavde proizlazi:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=0,\ \text{tj. } a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \vec{a} \text{ i } \vec{b} \text{ su okomiti, ili } \vec{a}=\vec{0} \text{ ili } \vec{b}=\vec{0}.$$

b) *Vektorski produkt dvaju vektora.* Ako su vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ dani koordinatama. $\vec{a}(a_x,a_y,a_z)$ i $\vec{b}(b_x,b_y,b_z)$, *tada je:*

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix},$$

specijalno je:

$$\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k}, \vec{j}\times\vec{k}=\vec{i}, \vec{k}\times\vec{i}=\vec{j},$$
$$\vec{j}\times\vec{i}=-\vec{k}, \vec{k}\times\vec{j}=-\vec{i}, \vec{i}\times\vec{k}=-\vec{j},$$
$$\vec{i}\times\vec{i}=\vec{j}\times\vec{j}=\vec{k}\times\vec{k}=\vec{0}.$$

c) *Vektorsko-skalarni produkt triju vektora.*

Ako su vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ dani koordinatama: $\vec{a}(a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b}(b_x, b_y, b_z)$ i $\vec{c}(c_x, c_y, c_z)$, tada je:

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = (\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Napomena: Kad vektor zadajemo koordinatama mislit ćemo pritom na pravokutne koordinate. Ako se radi o afinim (kosokutnim) koordinatama to ćemo posebno naglasiti.

Zadaci

1. Izračunati:

a) $(2\vec{a}+3\vec{b}-5\vec{c})\cdot(\vec{a}-2\vec{b}-4\vec{c})$,

b) $(2\vec{a}+3\vec{b}-5\vec{c})\times(\vec{a}-2\vec{b}-4\vec{c})$.

a) $(2\vec{a}+3\vec{b}-5\vec{c})\cdot(\vec{a}-2\vec{b}-4\vec{c}) =$
$= 2\vec{a}^2+3\vec{b}\cdot\vec{a}-5\vec{c}\cdot\vec{a}-4\vec{a}\cdot\vec{b}-6\vec{b}^2+10\vec{c}\cdot\vec{b}-8\vec{a}\cdot\vec{c}-12\vec{b}\cdot\vec{c}+20\vec{c}^2 =$
$= 2\vec{a}^2-6\vec{b}^2+20\vec{c}^2-\vec{a}\cdot\vec{b}-13\vec{a}\cdot\vec{c}-2\vec{b}\cdot\vec{c}.$

b) $(2\vec{a}+3\vec{b}-5\vec{c})\times(\vec{a}-2\vec{b}-4\vec{c}) =$
$= 2\vec{a}\times\vec{a}+3\vec{b}\times\vec{a}-5\vec{c}\times\vec{c}-4\vec{a}\times\vec{b}-6\vec{b}\times\vec{b}+10\vec{c}\times\vec{b}-8\vec{a}\times\vec{c}-$
$-12\vec{b}\times\vec{c}+20\vec{c}\times\vec{c}=\vec{0}-3\vec{a}\times\vec{b}+5\vec{a}\times\vec{c}-4\vec{a}\times\vec{b}-\vec{0}-10\vec{b}\times\vec{c}-$
$-8\vec{a}\times\vec{c}-12\vec{b}\times\vec{c}+\vec{0}= -7\vec{a}\times\vec{b}-3\vec{a}\times\vec{c}-22\vec{b}\times\vec{c}=7\vec{b}\times\vec{a}+3\vec{c}\times\vec{a}+$
$+22\vec{c}\times\vec{b}.$

2. Dokaži da vrijedi:

$$|\vec{a}\times\vec{b}|^2=\vec{a}^2\cdot\vec{b}^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2.$$

Prema definiciji skalarnog i vektorskog produkta jeste:

$$(\vec{a}\cdot\vec{b})^2+|\vec{a}\times\vec{b}|^2=(|\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\phi)^2+(|\vec{a}|\,|\vec{b}|\sin\phi)^2=$$
$$=|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2\cos^2\phi+|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2\sin^2\phi=|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2(\cos^2\phi+\sin^2\phi)=|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2.$$

Prema tome je:

$(\vec{a}\cdot\vec{b})^2+|\vec{a}\times\vec{b}|^2=\vec{a}^2\cdot\vec{b}^2$, odakle proizlazi tvrdnja.

3. Ako su zadana u afinim koordinatama dvaju vektora:

$\vec{a}=a^1\vec{e}_1+a^2\vec{e}_2+a^3\vec{e}_3$ i $\vec{b}=b^1\vec{e}_1+b^2\vec{e}_2+b^3\vec{e}_3$,

izračunati njihov a) skalarni produkt, b) vektorski produkt.

a) $\vec{a}\cdot\vec{b}=a^1b^1\vec{e}_1\cdot\vec{e}_1+a^2b^2\vec{e}_2\cdot\vec{e}_2+a^3b^3\vec{e}_3\cdot\vec{e}_3+$
$+(a^1b^2+a^2b^1)\vec{e}_1\cdot\vec{e}_2+(a^2b^3+a^3b^2)\vec{e}_2\cdot\vec{e}_3+$
$+(a^3b^1+a^1b^3)\vec{e}_3\cdot\vec{e}_1.$

b) $\vec{a}\times\vec{b}=a^1b^1\vec{e}_1\times\vec{e}_1+a^2b^2\vec{e}_2\times\vec{e}_2+a^3b^3\vec{e}_3\times\vec{e}_3+$
$+a^1b^2\vec{e}_1\times\vec{e}_2+a^1b^3\vec{e}_1\times\vec{e}_3+a^2b^1\vec{e}_2\times\vec{e}_1+$
$+a^2b^3\vec{e}_2\times\vec{e}_3+a^3b^1\vec{e}_3\times\vec{e}_1+a^3b^2\vec{e}_3\times\vec{e}_2=$
$=(a^1b^2-a^2b^1)\vec{e}_1\times\vec{e}_2+(a^1b^3-a^3b^1)\vec{e}_1\times\vec{e}_3+$
$+(a^2b^3-a^3b^2)\vec{e}_2\times\vec{e}_3,$
jer je $\vec{e}_1\times\vec{e}_1=\vec{e}_2\times\vec{e}_2=\vec{e}_3\times\vec{e}_3=\vec{0}$.

4. Dokaži da je:

$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{c}\times\vec{d})=(\vec{a}\cdot\vec{c})\ (\vec{b}\cdot\vec{d})-(\vec{a}\cdot\vec{d})\ (\vec{b}\cdot\vec{c})$.

(Vidi 1.6.a.)

Označimo li $\vec{c}\times\vec{d}$ sa $\vec{s}$ bit će prema 1.5.b:
$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{c}\times\vec{d})=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{s}=\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{s})=\vec{a}\cdot[\vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{d})]=$
$=\vec{a}\cdot[(\vec{b}\cdot\vec{d})-\vec{d}(\vec{b}\cdot\vec{c})]=(\vec{a}\cdot\vec{c})\ (\vec{b}\cdot\vec{d})-(\vec{a}\cdot\vec{d})\ (\vec{b}\cdot\vec{c}).$

Slično bismo dobili ako bismo označili $\vec{a}\times\vec{b}$ sa $\vec{r}$:
$(\vec{r}\times\vec{b})\ (\vec{c}\times\vec{d})=\vec{r}\cdot(\vec{c}\times\vec{d})=(\vec{r}\times\vec{c})\cdot\vec{d}=$
$=[(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}]\cdot\vec{d}=[\vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{c})-\vec{a}(\vec{b}\cdot\vec{c})]\cdot\vec{d}=$
$=(\vec{b}\cdot\vec{d})\ (\vec{a}\cdot\vec{c})-(\vec{a}\cdot\vec{d})\ (\vec{b}\cdot\vec{c}).$

5. Dokaži da je:

$$(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{c}\times\vec{d}=\vec{b}(\vec{a},\vec{c},\vec{d})-\vec{a}(\vec{b},\vec{c},\vec{d})=$$
$$=\vec{c}(\vec{a},\vec{b},\vec{d})-\vec{d}(\vec{a},\vec{b},\vec{c}).$$

(Vidi 1.6.b.)

Postupit ćemo slično kao i u prethodnom zadatku i označiti najprije $\vec{c}\times\vec{d}$ sa $\vec{s}$:

$$(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{c}\times\vec{d})=(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{s}=\vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{s})-$$
$$-\vec{a}(\vec{b}\cdot\vec{s})=\vec{b}[\vec{a}\cdot(\vec{c}\times\vec{d})]-\vec{a}[\vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{d})]=$$
$$=\vec{b}(\vec{a},\vec{c},\vec{d})-\vec{a}(\vec{b},\vec{c},\vec{d}).$$

Zatim ćemo $\vec{a}\times\vec{b}$ označiti s $\vec{r}$:

$$(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{c}\times\vec{d})=\vec{r}\times(\vec{c}\times\vec{d})=$$
$$=\vec{c}(\vec{r}\cdot\vec{d})-\vec{d}(\vec{r}\cdot\vec{c})=\vec{c}[(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{d}]-$$
$$-\vec{d}[(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}]=\vec{c}(\vec{a},\vec{b},\vec{d})-\vec{b}(\vec{a},\vec{b},\vec{c}).$$

6. Dokaži da je:

$$\vec{a}\times[\vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{d})]=(\vec{b}\cdot\vec{d})\,(\vec{a}\times\vec{c})-(\vec{b}\times\vec{c})\,(\vec{a}\times\vec{d}).$$

(Vidi 1.6.c.)

$$\vec{a}\times[\vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{d})]=\vec{a}\times[\vec{c}(\vec{b}\cdot\vec{d})-\vec{d}(\vec{b}\cdot\vec{c})]=$$
$$=(\vec{a}\times\vec{c})\,(\vec{b}\cdot\vec{d})-(\vec{a}\times\vec{d})\,(\vec{b}\cdot\vec{c}).$$

7. Dokaži da je:

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c})\,(\vec{p},\vec{q},\vec{s})=\begin{vmatrix}(\vec{a}\cdot\vec{p}) & (\vec{a}\cdot\vec{q}) & (\vec{a}\cdot\vec{s})\\(\vec{b}\cdot\vec{p}) & (\vec{b}\cdot\vec{q}) & (\vec{b}\cdot\vec{s})\\(\vec{c}\cdot\vec{p}) & (\vec{c}\cdot\vec{q}) & (\vec{c}\cdot\vec{s})\end{vmatrix}.$$

(Vidi 1.6.d.)

Zadajmo vektore $\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{p},\vec{q}$ i $\vec{s}$ pomoću koordinata: $\vec{a}(a_x,a_y,a_z)$, $\vec{b}(b_x,b_y,b_z)$, $\vec{c}(c_x,c_y,c_z)$, $\vec{p}(p_x,p_y,p_z)$, $\vec{q}(q_x,q_y,q_z)$, i $\vec{s}(s_x,s_y,s_z)$. Tada imamo:

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c})\,(\vec{p},\vec{q},\vec{s})=\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\b_x & b_y & b_z\\c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}p_x & p_y & p_z\\q_x & q_y & q_z\\s_x & s_y & s_z\end{vmatrix}.$$

Pomnožimo li dvije determinante na desnoj strani po pravilu »redak s retkom« dobit ćemo traženu tvrdnju.

8. Ako su zadani vektori $\vec{a}(5,3,-4)$, $\vec{b}(3,-1,5)$ i $\vec{c}(2,3,-3)$ treba izračunati:

a) $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$, b) $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$,

c) $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{a}\times\vec{c})$, d) $(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{a}\times\vec{c})$.

a) Računajmo na dva načina: Po definiciji u 1.7.b i kraće po formuli u 1.5.c. Imamo po formuli u 1.7.b:

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=(5\vec{i}+3\vec{j}-4\vec{k})\times\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\3 & -1 & 5\\2 & 3 & -3\end{vmatrix}=$$
$$=(5\vec{i}+3\vec{j}-4\vec{k})\times(-12\vec{i}+19\vec{j}+11\vec{k})=$$
$$=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\5 & 3 & -4\\-12 & 19 & 11\end{vmatrix}=109\,\vec{i}-7\,\vec{j}+131\,\vec{k}.$$

Kraće računamo po formuli: (Vidi 1.5.d.)

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=\vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{c})-\vec{c}(\vec{a}\cdot\vec{b}).$$

Računajmo skalarne produkte u zagradama po formuli u 1.7.a:

$$(\vec{a}\cdot\vec{c})=10+9+12=31\quad\text{i}\quad(\vec{a}\cdot\vec{b})=15-3-20=-8.$$

Tada je:

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=31\,(3\vec{i}-\vec{j}+5\vec{k})+8\,(2\vec{i}+3\vec{j}-3\vec{k})=$$
$$=93\vec{i}-31\vec{j}+155\vec{k}+16\vec{i}+24\vec{j}-24\vec{k}=$$
$$=109\vec{i}-7\vec{j}+131\vec{k}.$$

b) Računat ćemo od sada kraće prema formuli u 1.5.d.

$$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}=\vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{c})-\vec{a}(\vec{b}\cdot\vec{c}).$$

Tada je $(\vec{a}\cdot\vec{c})=31$, $\vec{b}\cdot\vec{c}=-12$, pa je:

$$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}=31\,(3\vec{i}-\vec{j}+5\vec{k})+12\,(5\vec{i}+3\vec{j}-4\vec{k})=$$
$$=93\vec{i}-31\vec{j}+155\vec{k}+60\vec{i}+36\vec{j}-48\vec{k}=$$
$$=153\vec{i}+5\vec{j}+107\vec{k}.$$

Odavde se vidi svojstvo iz 1.5.d:

$$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}\neq\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}).$$

c) Prema 1.6.a imamo:

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{a}\times\vec{c})=\begin{vmatrix}\vec{a}^2 & (\vec{b}\cdot\vec{a})\\(\vec{a}\cdot\vec{c}) & (\vec{b}\cdot\vec{c})\end{vmatrix}=\vec{a}^2(\vec{b}\cdot\vec{c})-(\vec{a}\cdot\vec{c})\,(\vec{b}\cdot\vec{a})=$$
$$=50\cdot(-12)-31\cdot(-8)=-600+248=-352.$$

d) Prema 1.6.b imamo ako rastavimo »po $\vec{a}$ i $\vec{c}$«.

$$(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{a}\times\vec{c})=\vec{a}[(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}]-\vec{c}[(\vec{a}\times\vec{c})\cdot\vec{a}]=$$
$$=\vec{a}(\vec{a},\vec{b},\vec{c})-\vec{0}=\vec{a}(\vec{a},\vec{b},\vec{c}),$$

ili ako rastavimo »po $\vec{b}$ i $\vec{a}$«:

$$(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{a}\times\vec{c})=\vec{b}[\vec{a}\cdot(\vec{a}\times\vec{c})]-\vec{a}[\vec{b}\cdot(\vec{a}\times\vec{c})]=$$
$$=\vec{0}-\vec{a}[(\vec{b}\times\vec{a})\cdot\vec{c}]=\vec{a}[(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}]=\vec{a}(\vec{a},\vec{b},\vec{c}).$$

Tada je prema 1.7.c:

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=\begin{vmatrix}5 & 3 & -4\\3 & -1 & 5\\2 & 3 & -3\end{vmatrix}=15+30-36-8-75+27=-47.$$

Na kraju je:

$$(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{a}\times\vec{c})=-47\,(5\vec{i}+3\vec{j}-4\vec{k})=$$
$$=-235\,\vec{i}-141\,\vec{j}+188\,\vec{k}.$$

9. Ako su zadani vektori: $\vec{a}(1,2,-3)$, $\vec{b}(2,-1,-2)$, $\vec{c}(-4,3,-1)$ i $\vec{d}(5,-4,4)$, treba izračunati:

a) $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{c}\times\vec{d})$, b) $(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{c}\times\vec{d})$,
c) $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{c}\times\vec{a})$, d) $(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{c}\times\vec{a})$.

a) Po 1.6.a imamo:

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{c}\times\vec{d}) = \begin{vmatrix} (\vec{a}\cdot\vec{c}) & (\vec{a}\cdot\vec{d}) \\ (\vec{b}\cdot\vec{c}) & (\vec{b}\cdot\vec{d}) \end{vmatrix}.$$

Jer je:

$$(\vec{a}\cdot\vec{c}) = -4+6+3 = 5, \qquad (\vec{a}\cdot\vec{d}) = 5-8-12 = -15,$$
$$(\vec{b}\cdot\vec{c}) = -8-3+2 = -9, \qquad (\vec{b}\cdot\vec{d}) = 10+4-8 = 6,$$

imamo na kraju:

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{c}\times\vec{d}) = \begin{vmatrix} 5 & -15 \\ -9 & 6 \end{vmatrix} = -105.$$

b) Po 1.6.b imamo (ili po zad. 5):

$(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{c}\times\vec{d}) = \vec{c}[(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{d}] - \vec{d}[(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}]$, (rastav »po $\vec{c}$ i $\vec{d}$«)
ili $= \vec{b}[\vec{a}\cdot(\vec{c}\times\vec{d})] - \vec{a}[\vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{d})]$, (rastav »po $\vec{b}$ i $\vec{a}$«)

Na prvi način rastavljeno »po $\vec{b}$ i $\vec{a}$« imamo:

$$(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{c}\times\vec{d}) = \vec{b}(\vec{a},\vec{c},\vec{d}) - \vec{a}(\vec{b},\vec{c},\vec{d}).$$

Kako je:

$$(\vec{a},\vec{c},\vec{d}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -4 & 2 & -1 \\ 5 & -4 & 4 \end{vmatrix} = 27,$$

$$(\vec{b},\vec{c},\vec{d}) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -4 & 3 & -1 \\ 5 & -4 & 4 \end{vmatrix} = 3, \text{ to je:}$$

$$\begin{aligned}(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{c}\times\vec{d}) &= 27\vec{b} - 3\vec{a} = \\ &= 27(2\vec{i}-\vec{j}-2\vec{k}) - 3(\vec{i}+2\vec{j}-3\vec{k}) = \\ &= 51\vec{i} - 33\vec{j} - 45\vec{k}.\end{aligned}$$

Na drugi način rastavljeno »po $\vec{c}$ i $\vec{d}$« imamo:

$$(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{c}\times\vec{d}) = \vec{c}(\vec{a},\vec{b},\vec{d}) - \vec{d}(\vec{a},\vec{b},\vec{c}).$$

Dalje je:

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{d}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & -2 \\ 5 & -4 & 4 \end{vmatrix} = -39,$$

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & -2 \\ -4 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 21.$$

Tada je:

$$\begin{aligned}(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{c}\times\vec{d}) &= -39\vec{c} - 21\vec{d} = \\ &= -39(-4\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k}) - 21(5\vec{i}-4\vec{j}+4\vec{k}) = \\ &= 51\vec{i} - 33\vec{j} - 45\vec{k}.\end{aligned}$$

c) Prema rezultatu prethodnog zadatka imamo:

$$\begin{aligned}(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{c}\times\vec{a}) &= -(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{a}\times\vec{c}) = (\vec{a}\cdot\vec{c})\,(\vec{b}\cdot\vec{a}) - \vec{a}^2(\vec{b}\cdot\vec{c}) = \\ &= 5\cdot 6 - 14\cdot(-9) = 156.\end{aligned}$$

d) Prema rezultatu prethodnog zadatka imamo:

$$\begin{aligned}(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{c}\times\vec{a}) &= -(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{a}\times\vec{c}) = -\vec{a}(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = \\ &= -21(\vec{i}+2\vec{j}-3\vec{k}) = -21\vec{i} - 42\vec{j} + 63\vec{k}.\end{aligned}$$

10. Zadani su vektori $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$, koji nisu komplanarni i vektor $\vec{d}$. Predoči vektor $\vec{d}$ kao linearnu kombinaciju tih triju vektora.

Kako je:

$$\begin{aligned}(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{c}\times\vec{d}) &= \vec{c}(\vec{a},\vec{b},\vec{d}) - \vec{d}(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = \\ &= \vec{b}(\vec{a},\vec{c},\vec{d}) - \vec{a}(\vec{b},\vec{c},\vec{d}),\end{aligned}$$

to je:

$$\vec{c}(\vec{a},\vec{b},\vec{d}) - \vec{d}(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = \vec{b}(\vec{a},\vec{c},\vec{d}) - \vec{a}(\vec{b},\vec{c},\vec{d}).$$

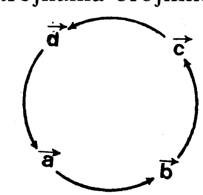
Tada je:

$$\vec{d}(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = \vec{a}(\vec{b},\vec{c},\vec{d}) - \vec{b}(\vec{a},\vec{c},\vec{d}) + \vec{c}(\vec{a},\vec{b},\vec{d}).$$

Kako vektori $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ nisu komplanarni, to je $(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) \neq 0$, pa imamo na kraju:

$$\vec{d} = \frac{(\vec{b},\vec{c},\vec{d})}{(\vec{a},\vec{b},\vec{c})}\,\vec{a} - \frac{(\vec{a},\vec{c},\vec{d})}{(\vec{a},\vec{b},\vec{c})}\,\vec{b} + \frac{(\vec{a},\vec{b},\vec{d})}{(\vec{a},\vec{b},\vec{c})}\,\vec{c}.$$

Ovo možemo zgodnije pisati ako uočimo da su članovi u trojkama brojnika desne strane ciklički permutirani po shemi (sl. 10):



Sl. 10.

KRIVE I POVRŠI

Kriva L u prostoru se zadaje *parametarski* na sledeći način:

$$L : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}, \quad t \in I, \tag{1}$$

(*skalarni* oblik), ili

$$L : \vec{r}(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big), \quad t \in I \tag{1'}$$

(*vektorski* oblik), gde je $I \subset R$ interval u širem smislu (otvoren, zatvoren, poluotvoren, konačan ili beskonačan), a funkcije $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ neprekidne, diferencijabilne ili neprekidno-diferencijabilne, zavisno od potrebe.

Kriva L može još biti zadata i na sledeće načine:

$$L : \begin{cases} y = y(x) \\ z = z(x), \end{cases} \quad x \in I \tag{2}$$

(*eksplicitni* oblik);

$$L : \begin{cases} F_1(x,y,z) = 0 \\ F_2(x,y,z) = 0 \end{cases} \tag{3}$$

(*implicitni oblik*).

Površ S ($S \subset \mathbb{R}^3$) se zadaje *parametarski* na sledeći način:

$$S : \begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases}, \quad (u,v) \in \triangle \tag{4}$$

(*skalarni* oblik), ili

$$S : \vec{r}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)), \tag{4'}$$

(*vektorski* oblik), gde je $\triangle$ dvodimenzionalni povezan skup u ravni uOv, a $x(u,v)$, $y(u,v)$, $z(u,v)$ su funkcije dve promenljive koje zadovoljavaju slične uslove kao što je spomenuto za funkcije date u (1).

Ostali oblici jednačina površi S:

$$S : z = z(x,y), (x,y) \in D \quad (D \subset xOy) \tag{5}$$

(*eksplicitni* oblik);

$$S : F(x,y,z) = 0 \tag{6}$$

(*implicitni* oblik).

1° Ako tačka $M_0(x_0, y_0, z_0)$ pripada L, tj. ako se koordinate x_0, y_0, z_0 te tačke dobijaju iz sistema (1) za neko $t = t_0$ (ako je u pitanju parametarski oblik), ili za $x = x_0$ iz (2), ili, pak, zadovoljavaju sistem (3), tada *jednačina tangente na krivu L u tački $M_0(x_0, y_0, z_0)$* glasi:

$$\tau : \frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3}. \tag{7}$$

gde je $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) \neq \vec{0}$ vektor tangente, koji u zavisnosti od načina zadavanja krive L ((1), (2) ili (3)) ima redom oblik:

$$\vec{a} = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)); \tag{8}$$

$$\vec{a} = (1, y'(x_0), z'(x_0)); \tag{9}$$

$$\vec{a} = \left(\begin{vmatrix} F'_{1y} & F'_{1z} \\ F'_{2y} & F'_{2z} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} F'_{1z} & F'_{1x} \\ F'_{2z} & F'_{2x} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} F'_{1x} & F'_{1y} \\ F'_{2x} & F'_{2y} \end{vmatrix} \right) \tag{10}$$

(gde su svi parcijalni izvodi izračunati u tački M_0).

Jednačina normalne ravni η krive L u tački $M_0(x_0, y_0, z_0)$ glasi:

$$\eta : a_1(x - x_0) + a_2(y - y_0) + a_3(z - z_0) = 0, \tag{11}$$

gde je $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ ($\neq \vec{0}$) vektor tangente krive L u tački M_0, a koji ima prethodno spomenute oblike (zavisno od načina zadavanja krive L).

2° *Jednačina tangentne ravni površi S u tački $M_0(x_0, y_0, z_0)$* te površi glasi:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0, \tag{12}$$

gde je $\vec{n} = (A, B, C)$ vektor normale te površi u tački M_0. U zavisnosti od oblika jednačine površi S, (4), (5) ili (6), imamo redom sledeće vrednosti vektora $\vec{n}$:

$$\vec{n} = \left(\begin{vmatrix} y'_u & z'_u \\ y'_v & z'_v \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} z'_u & x'_u \\ z'_v & x'_v \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix} \right) \tag{13}$$

gde su parcijalni izvodi izračunati za $u = u_0$ i $v = v_0$, koji odgovaraju tački M_0;

$$\vec{n} = (z'_x(x_0, y_0), z'_y(x_0, y_0), -1); \tag{14}$$

$$\vec{n} = (F'_x(x_0, y_0, z_0), F'_y(x_0, y_0, z_0), F'_z(x_0, y_0, z_0)). \tag{15}$$

Jednačine normale površi u tački $M_0(x_0, y_0, z_0)$ te površi glase:

$$\frac{x - x_0}{A} = \frac{y - y_0}{B} = \frac{z - z_0}{C},$$

gde je $\vec{n} = (A, B, C)$ prethodno spomenuti vektor normale površi koji ima jedan od oblika (13), (14) ili (15).

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ \ddot{x} & \ddot{y} & \ddot{z} \end{vmatrix} = 0 \quad \text{jed. osk. ravni u } M(x_1,y_1,z_1)$$

$\vec{t} \perp \vec{b}$

$\vec{t} \perp \vec{n}$

$\vec{b} \perp \vec{n}$

$$\dot{x}(x-x_1) + \dot{y}(y-y_1) + \dot{z}(z-z_1) = 0 \quad \text{jed. norm. ravni}$$

$$\ddot{x}(x-x_1) + \ddot{y}(y-y_1) + \ddot{z}(z-z_1) = 0 \quad \text{jed. rektif. ravni}$$

VI GLAVA

DIFERENCIJALNA GEOMETRIJA

§ 1. Krive u prostoru

Ako je u trodimenzionalnom euklidskom prostoru kriva zadata jednačinom

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k} \,,$$

ili u parametarskom obliku

$$x = x(t) \,, \quad y = y(t) \,, \quad z = z(t) \,,$$

tada je dužina luka krive od tačke sa parametrom t_o *do tačke sa parametrom* t_1 *data formulom*

$$s = \int_{t_o}^{t_1} ds = \int_{t_o}^{t_1} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\, dt .$$

Vektor tangente, binormale i normale krive odredjujemo formulama

$$\vec{t} = \dot{\vec{r}}, \quad \vec{b} = \dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}, \quad \vec{n} = \vec{b} \times \vec{t} \quad \left(\dot{\vec{r}} = \frac{d\vec{r}}{dt} \,, \; \ddot{\vec{r}} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}, \; \dddot{\vec{r}} = \frac{d^3\vec{r}}{dt^3}\right)$$

i njihove ortove ćemo obeležiti respektivno sa

$$\vec{t}_o,\ \vec{b}_o,\ \vec{n}_o.$$

Tačka M , vektori $\vec{t}$ *i* $\vec{n}$ *odredjuju oskulatornu ravan, M,*$\vec{b}$ *i* $\vec{n}$ *normalnu ravan, a M,*$\vec{b}$ *i* $\vec{t}$ *rektifikacionu ravan krive u tački M krive.*

Poluprečnik krivine R i krivina K su odredjeni relacijama

$$\frac{1}{K^2} = R^2 = \frac{|\dot{\vec{r}}^2|^3}{|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}|^2} \qquad tj. \quad R = \frac{|\vec{t}|^3}{|\vec{b}|} \,.$$

Poluprečnik torzije, $\pm T$*, je dat formulom:*

$$T = -\frac{[\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}]^2}{\dddot{\vec{r}}[\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}]} = \frac{[\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}]^2}{\dddot{\vec{r}}[\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}]} = \frac{|\vec{b}|^2}{\dddot{\vec{r}} \cdot \vec{b}} \,.$$

Torziju ćemo označiti sa $\frac{1}{T}$ *. Ako je u jednačini krive parametar t jednak dužini luka s , tada je*

$$\varkappa = K = \frac{1}{R} = \left|\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\right| = |\vec{r}\,''|$$

a

$$-\tau = \frac{1}{T} = \pm \left|\frac{d\vec{b}_o}{ds}\right| \,.$$

$$K = \frac{|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}|}{|\dot{\vec{r}}|^3}$$

Frenetovi obrasci glase:

$$\frac{d\vec{t}_o}{ds} = \frac{\vec{n}_o}{R} \,, \qquad \frac{d\vec{t}_o}{ds} = K\vec{n}_o$$

$$\frac{d\vec{n}_o}{ds} = -\frac{\vec{t}_o}{R} - \frac{\vec{b}_o}{T} \,, \qquad \frac{d\vec{n}_o}{ds} = -K\vec{t}_o + \tau\vec{b}_o$$

$$\frac{d\vec{b}_o}{ds} = \frac{\vec{n}_o}{T} \,. \qquad \frac{d\vec{b}_o}{ds} = -\tau\vec{n}_o$$

Obvojnica familije ravnih krivih F(x,y,a) = 0 se dobije eliminisanjem parametra a iz jednačine

$$\frac{\partial F(x,y,a)}{\partial a} = 0 \,, \qquad F(x,y,a) = 0 \,.$$

§ 2. Površi u prostoru

Neka je površ data vektorskom jednačinom

$$\vec{r}(u,v) = x(u,v)\vec{i} + y(u,v)\vec{j} + z(u,v)\vec{k}$$

ili u parametarskom obliku

$$x = x(u,v), \quad y = y(u,v), \quad z = z(u,v)$$

gde je Jacobijeva matrica

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{bmatrix}$$

ranga 2. Tada je vektor normale $\vec{n}$ *na površ dat sa*

$$\vec{n} = [\vec{r}_u' \times \vec{r}_v'], \quad \vec{r}_u' = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}, \quad \vec{r}_v' = \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}$$

Ako je površ zadata jednačinom

$$F(x,y,z) = 0,$$

tada je

$$\vec{n} = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z} \right).$$

Ako je površ zadata jednačinom

tada je

$$\vec{n} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, -1 \right).$$

Jednačina tangentne ravni površi u tački M_o *odredjenoj vektorom položaja* $\vec{r}_o$ *je*

$$(\vec{r} - \vec{r}_o)\vec{n}_{M_o} = 0.$$

Ako familija površi $f(x,y,z,a) = 0$ *ima obvojnu površ, to ona sva leži na površi* $F(x,y,z) = 0$ *koja se dobija eliminacijom parametra* a *iz jednačina*

$$f(x,y,z,a) = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial a} = 0.$$

Ako dvoparametarska površ $f(x,y,z,a,b) = 0$ *ima obvojnu površ to sve njene tačke zadovoljavaju jednačinu* $F(x,y,z) = 0$ *koja se dobija eliminacijom parametara* a *i* b *iz jednačina*

$$f(x,y,z,a,b) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial b} = 0,$$

no tu jednačinu mogu zadovoljiti i druge tačke.

§3. Krive linije na površi

Neka je površ data jednačinom $\vec{r} = \vec{r}(u,v)$. *Tada je prva osnovna forma* F_1 *površi odredjena sa*

$$F_1 = ds^2 = (d\vec{r} \cdot d\vec{r}) = (d\vec{r})^2,$$

gde je $$d\vec{r} = \vec{r}_u' du + \vec{r}_v' dv.$$

Može se pisati da je

$$F_1 = E\,du^2 + 2F du dv + G dv^2,$$

$$E = (\vec{r}_u')^2, \quad F = (\vec{r}_u' \cdot \vec{r}_v'), \quad G = (\vec{r}_v' \cdot \vec{r}_v').$$

Jedinični vektor normale površi je odredjen sa

$$\vec{n}_o = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \frac{\vec{r}_u' \times \vec{r}_v'}{\sqrt{EG - F^2}}.$$

Druga osnovna forma površi je

$$F_2 = (d^2\vec{r} \cdot \vec{n}_o) = -(d\vec{r} \cdot d\vec{n}_o) = L\,du^2 + 2M du dv + N dv^2,$$

gde je

$$d^2\vec{r} = \vec{r}''_{uu} du^2 + 2\vec{r}'_{uv} du\,dv + \vec{r}''_{vv} dv^2.$$

Neka je K *krivina površi u tački* (u,v) *u pravcu* (du,dv), *a* $R = \frac{1}{K}$ *poluprečnik krive* c *dobivene normalnim presekom površi u tom* *pravcu. Tada je*

$$K = \frac{1}{R} = \frac{F_2}{F_1} = \frac{L\,du^2 + 2\,M du dv + N dv^2}{E du^2 + 2F du dv + G dv^2} .$$

Podelivši i brojitelj i imenitelj gornjeg razlomka sa dv^2 *dobijamo* K *kao funkciju od* u,v *i* $\frac{du}{dv}$:

$$K = f(u,v,\ \frac{du}{dv}) .$$

Pravci za koje K *ima maksimalnu i minimalnu vrednost u fiksiranoj tački* (u,v) *zovu se glavni pravci u toj tački. Mogu se dobiti kao rešenja jednačine*

$$K_x' = 0 \qquad \textit{gde je} \qquad x = \frac{du}{dv} .$$

Glavnim pravcima odgovaraju glavne krivine, i one mogu biti odredjene i kao koreni jednačine

(a) $(EG-F^2)K^2 - (EN-2FM+GL)K + (LN - M^2) = 0$.

Ako su K_1 *i* K_2 *glavne krivine, tada su* $R_1 = \frac{1}{K_1}$ i $R_2 = \frac{1}{K_2}$ *glavni poluprečnici.* $\frac{1}{2}(K_1 + K_2)$ *zove se srednja krivina, a* $K_1 K_2$ *se zove Gaussova krivina površi. Iz jednačine (a) imamo*

$$K_1 K_2 = \frac{LN-M^2}{EG-F^2} , \quad K_1 + K_2 = \frac{EN-2FM+GL}{EG-F^2} .$$

Gaussova krivina površi se može izračunati i preko formule

$$K = \frac{R_{1212}}{g}$$

Kriva na površi čija tangenta u svakoj tački ima pravac jednog od glavnih pravaca u toj tački, zove se linija krivine krive te površi.

Ako su x_1 *i* x_2 *rešenja jednačine* $K_x' = 0$, *to je*

$$x_1 = (\frac{du}{dv})_1 = f_1(u,v)$$

$$x_2 = (\frac{du}{dv})_2 = f_2(u,v) .$$

Integralne krive gornjih diferencijalnih jednačina su linije krive. Ako je u nekoj tački $K_x' \equiv 0$, *tada je svaki pravac glavni pravac, tj. normalna krivina je ista za svaki pravac u toj tački, i ta tačka se zove pupčasta tačka površi.*

Kako je

$$K = \frac{Lx^2 + 2Mx + N}{Ex^2 + 2Fx + G} , \quad x = \frac{du}{dv} ,$$

to je $K_x' = 0$ *za ono* x *koje je rešenje jednačine*

$$(FL-ME)x^2 + (GL-NE)x + (GM-FN) = 0 ,$$

tj.

$$\begin{vmatrix} -1 & x & -x^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix} = 0$$

Posle množenja prve vrste sa dv^2 *dobijamo*

$$\begin{vmatrix} dv^2 & -du dv & du^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix} = 0$$

što predstavlja diferencijalnu jednačinu linije krivine.

Koristeći Rodrigovu formulu koja kaže da je za glavne pravce, tj. za pravce u kojima je glavna krivina ekstramalna, imamo još i sledeće diferencijalne jednačine linije krive:

$$d\vec{n}_o = \lambda\, d\vec{r}$$

što povlači da je

$$d\vec{r} \cdot [\vec{n} \times d\vec{n}] = 0$$

Kako u prvoj aproksimaciji $\frac{1}{2} F_2$ *predstavlja rastojanje* d *tačke* $\vec{r}(u+du,\ v+dv)$ *od tangentne ravni površi povučene u tački* $\vec{r}(u,v)$, *to će biti istog znaka za svako* x, *tj. za svaki pravac* $\frac{du}{dv}$ *ako je diskriminanta kvadratnog trinoma*

(b) $Lx^2 + 2Mx + N$

negativna, tj. ako je $M^2 - LN < 0$ *i takva tačka površi se zove eliptična tačka. U okolini te tačke površ je sa iste strane tangentne ravni.*

Ako je diskriminanta od (b) pozitivna, tj. $M^2 - LN > 0$, *tada će postojati pravci* $\frac{du}{dv}$ *za koje je* $F_2 > 0$ *i takvi za koje je* $F_2 < 0$, *tj. površ će u toj tački biti sa razne strane tangentne ravni. Takva tačka se zove hiperbolična tačka površi. Pravci za koje je* $F_2 = 0$ *tj.* $Lx^2 + 2Mx + N = 0$ *zovu se asimptotski pravci u odredjenoj tački i u tim pravcima tangentna ravan dodiruje površ. Kriva na površi čija je tangenta u svakoj tački kolinearna sa asimptotskim pravcem u toj tački zove se asimptotska linija površi. Normalna krivina asimptotskih linija je nula. Dobijaju se kao integralne krive diferencijalne jednačine* $F_2 = 0$. *Iz svake hiperbolične tačke površi izlaze dve asimptotske linije.*

Ako je $M^2 - LN = 0$, *tada jednačina* $Lx^2 + 2Mx + N$ *ima jednu dvostruku nulu i postoji samo jedan pravac duž koje tangentna ravan dodiruje površ. Takva tačka površi zove se parabolična tačka površi.*

Ako glavna normala krive C_1 *zaklapa sa normalom površi ugao* θ, *tada je* (C_1 *leži na površi*)

$$R_1 = \pm R \cos\theta$$

gde je R_1 *poluprečnik krivine krive* C_1, *a* R *poluprečnik krivine krive* C, *koja se dobija normalnim presekom površi u tački krive* C_1 *i u pravcu iste. Oskulatorna ravan krive* C *sadrži tangentu krive* C_1 *i normalu površi. (*C *i* C_1 *imaju istu tangentu).*

Kriva na površi koja je normalna na nivoskoj liniji površi $z = 0$ *zove se linija najvećeg nagiba.*

Krive na površi kod kojih se glavna normala površi poklapa sa glavnom normalom krive u svakoj tački krive zovu se geodezijske linije površi.

Normala površi je tada normalna na binormalu krive, tj. važi

$$\vec{n} \cdot [d\vec{r} \times d^2\vec{r}] = 0$$

tj.

$$[\vec{r}_u' \times \vec{r}_v] \cdot [d\vec{r} \times d^2\vec{r}] = 0 .$$

Dio tablica integrala.

1. $\int u^a \mathrm{d}u = \frac{u^{a+1}}{a+1} + C,\ a \neq -1.$
2. $\int u^{-1} \mathrm{d}u = \int \frac{\mathrm{d}u}{u} = \int \frac{u'}{u} \mathrm{d}x = \ln|u| + C.$
3. $\int a^u \mathrm{d}u = \frac{a^u}{\ln|a|} + C; \int e^u \mathrm{d}u = e^u + C.$
4. $\int \sin \mathrm{d}u = -\cos u + C.$
5. $\int \cos \mathrm{d}u = \sin u + C.$
6. $\int \frac{1}{\cos^2 u} \mathrm{d}u = \operatorname{tg} u + C.$
7. $\int \frac{1}{\sin^2 u} \mathrm{d}u = -\operatorname{ctg} u + C.$
8. $\int \frac{\mathrm{d}u}{u^2+a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arc\,tg} \frac{u}{a} + C.$
9. $\int \frac{\mathrm{d}u}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C.$
10. $\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{a^2-u^2}} = \arcsin \frac{u}{a} + C.$
11. $\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u^2+a}} = \ln|u + \sqrt{u^2+a}| + C.$

Newton-Leibnizova formula.

$$\int_a^b f(u)\mathrm{d}u = \int f(u)\mathrm{d}u\Big|_a^b = F(u)|_a^b = F(b) - F(a), \text{ gdje je } F'(u) = f(u).$$

Osobine određenih integrala.

1. $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\mathrm{d}x.$
2. $\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0.$
3. $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x.$
4. $\int_a^b [f_1(x) + f_2(x) - f_3(x)]\mathrm{d}x = \int_a^b f_1(x)\mathrm{d}x + \int_a^b f_2(x)\mathrm{d}x - \int_a^b f_3(x)\mathrm{d}x.$
5. $\int_a^b c\, f(x)\mathrm{d}x = c\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$

Smjena promjenjivih u određenom integralu.

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ll} x = \varphi(t) & x = a \Rightarrow a = \varphi(\alpha) \Rightarrow t = \alpha \\ dx = \varphi'(t)dt & x = b \Rightarrow b = \varphi(\beta) \Rightarrow t = \beta \end{array} \right| = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta h(t)\mathrm{d}t$$

Nepravi integrali. $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \lim\limits_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\mathrm{d}x,\ \int\limits_{-\infty}^{b} f(x)\mathrm{d}x = \lim\limits_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)\mathrm{d}x, \ldots$

Računanje površine ravne figure. U zavisnosti od izgleda slike: $P = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$, $P = \int_c^d g(y)\mathrm{d}y$, $P = -\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$, $P = \int_a^b [\eta(x) - \mu(x)]\mathrm{d}x$, $P = \int_c^d [g(y) - h(y)]\mathrm{d}y$, ...

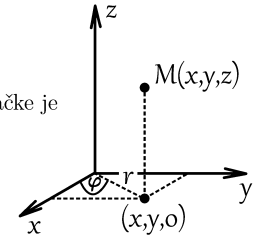
Zapremina rotacionog tijela. Ako, kriva data u parametarskom obliku $C : \begin{cases} x = \eta(t) \\ y = \mu(t) \\ t_1 \le t \le t_2 \end{cases}$ rotira oko x-ose, zapremine se računa po formuli

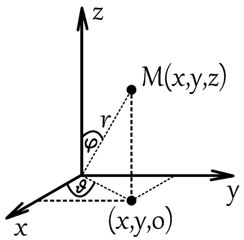
$$V_x = \pi \int_{t_1}^{t_2} [\mu(t)]^2 |\eta'(t)| \mathrm{d}t.$$

Ista kriva ako rotira oko y-ose, $V_y = \pi \int_{t_1}^{t_2} [\eta(t)]^2 |\mu'(t)| \mathrm{d}t$. Iz ove dvije formule, za funkcije $y = f(x)$ i $x = g(y)$, slijedi $V_x = \pi \int_a^b [f(x)]^2 \mathrm{d}x$ i $V_y = \pi \int_c^d [g(y)]^2 \mathrm{d}y$.

Računanje trojnih integrala uvođenjem cilindričnih i sfernih koordinata.

Na cilindrične koordinate prelazimo pomoću $\begin{cases} x = r\cos(\varphi) \\ y = r\sin(\varphi) \\ z = z \\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z \end{cases}$, opis tačke je





Za prelazak sa pravougaonih na sferne koordinate koristimo sljedeće smjene $\begin{cases} x = r\sin(\varphi)\cos(\theta) \\ y = r\sin(\varphi)\sin(\theta) \\ z = r\cos(\varphi) \\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = r^2\sin(\varphi)\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta \end{cases}$,

(opis tačke je prikazan na slici lijevo).

Primjena dvostrukih integrala.

$$(a)\ P = \iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y. \qquad (b)\ V = \iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Primjena trostrukih integrala. $(a)\ V = \iiint\limits_\Omega \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$

$$(b)\ T(x_T, y_T, z_T),\ \ x_T = \frac{1}{V}\iiint\limits_\Omega x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z, y_T = \frac{1}{V}\iiint\limits_\Omega y\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z, z_T = \frac{1}{V}\iiint\limits_\Omega z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

Krivoliniski integral prve vrste (po luku).

$$C: \begin{cases} x = \eta(t) \\ y = \mu(t) \\ t_1 \le t \le t_2 \end{cases}, \qquad \int\limits_C f(x,y)\mathrm{d}s = \int\limits_{t_1}^{t_2} f(\eta(t),\mu(t))\sqrt{(\eta'(t))^2 + (\mu'(t))^2}\mathrm{d}t.$$

$$C: \begin{cases} y = f(x) \\ a \le x \le b \end{cases}, \qquad \int\limits_C z(x,y)\mathrm{d}s = \int\limits_a^b z(x,f(x))\sqrt{1+(f'(x))^2}\mathrm{d}x.$$

Primjena krivoliniskog integrala prve vrste - Računanje površine cilindrične površi.

$$C: \begin{cases} F(x,y) = 0 \\ z = 0 \end{cases}, \qquad P = \int\limits_C z(x,y)\mathrm{d}s.$$

Krivoliniski integral druge vrste (po koordinatama).

$$C: \begin{cases} x = \eta(t) \\ y = \mu(t) \\ t_1 \le t \le t_2 \end{cases}, \qquad \int\limits_C P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = \int\limits_{t_1}^{t_2} [P(\eta(t),\mu(t))\eta'(t) + Q(\eta(t),\mu(t))\mu'(t)]\mathrm{d}t.$$

$$C: \begin{cases} y = f(x) \\ a \le x \le b \end{cases}, \qquad \int\limits_C P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = \int\limits_a^b [P(x,f(x)) + Q(x,f(x))f'(x)]\mathrm{d}x.$$

Krivoliniski integral druge vrste *ovisi o smjeru puta integracije*.

Formula Greena.

$$\int\limits_C P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = \iint\limits_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Primjena krivoliniskog integrala druge vrste - Računanje površine ravne figure.

$$P = \frac{1}{2}\int\limits_C x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x.$$

Nezavisnost krivoliniskog integrala od vrste konture. Određivanje primitivnih funkcija.

..., $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$, ..., $\mathrm{d}u(x,y) = \dfrac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x + \dfrac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y$, ...

Površinski integral prve vrste.

D projekcija od S: $z = \eta(x,y)$ na $x0y$ - $\iint\limits_S f(x,y,z)\mathrm{d}S = \iint\limits_D f(x,y,\eta(x,y))\sqrt{1+\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$

E projekcija od S: $y = \mu(x,z)$ na $x0z$ - $\iint\limits_S f(x,y,z)\mathrm{d}S = \iint\limits_E f(x,\mu(x,z),z)\sqrt{1+\left(\frac{\partial\mu}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\mu}{\partial z}\right)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}z.$

F projekcija od S: $x = \gamma(y,z)$ na $y0z$ - $\iint\limits_S f(x,y,z)\mathrm{d}S = \iint\limits_F f(\gamma(y,z),y,z)\sqrt{1+\left(\frac{\partial\gamma}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\gamma}{\partial z}\right)^2}\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$

Površinski integral druge vrste.

Ako je integral oblika $\iint\limits_S P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}z + R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ obično ga podjelimo na tri dijela $\iint\limits_S P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, $\iint\limits_S Q(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}z$, $\iint\limits_S R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. Neka je $\vec{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ vektor normale na površinu S, gdje su α, β i γ uglovi koje vektor normale zaklapa sa x, y i z osom. Tada

$$I_1 = \iint\limits_S P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \left|\begin{array}{c} S: x = \eta(y,z), \\ \text{neka je } D \text{ projekcija od } S \text{ na } y0z \text{ ravan}, \\ \text{neka je } \alpha \text{ ugao koji vektor} \\ \text{normale na } S \text{ zaklapa sa } x\text{-osom}, \end{array}\right| = \pm\iint\limits_D P(\eta(y,z),y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z \text{ gdje}$$

vrijednost za $\pm$ zavisi od $\cos(\alpha)$ ($\cos(\alpha) > 0$ stavljamo +, za $\cos(\alpha) < 0$ stavljamo -, a za $\cos(\alpha) = 0$ imamo $I_1 = 0$). Slično za I_2 i I_3

$$I_2 = \iint\limits_S Q(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}z = \left|\begin{array}{c} S: y = \mu(x,z), \\ \text{neka je } E \text{ projekcija od } S \text{ na } x0z \text{ ravan}, \\ \text{neka je } \beta \text{ ugao koji vektor} \\ \text{normale na } S \text{ zaklapa sa } y\text{-osom}, \end{array}\right| = \pm\iint\limits_E Q(x,\mu(x,z),z)\mathrm{d}x\mathrm{d}z.$$

$$I_3 = \iint\limits_S R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \left|\begin{array}{c} S: z = \delta(x,y), \\ \text{neka je } F \text{ projekcija od } S \text{ na } x0y \text{ ravan}, \\ \text{neka je } \gamma \text{ ugao koji vektor} \\ \text{normale na } S \text{ zaklapa sa } x\text{-osom}, \end{array}\right| = \pm\iint\limits_F R(x,y,\delta(x,y))\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Primjena površinskog integrala prve vrste - Izračunavanje površine dijela glatke površi.

$P = \iint\limits_S \mathrm{d}S = \iint\limits_D \sqrt{1+\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, gdje je D projekcija od S: $z = \eta(x,y)$ na $x0y$ ravan.

Stoksova formula. ...

Formula Gauss-Ostrogradski.

$$\iint\limits_S P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}z + R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iiint\limits_\Omega \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

Integrali ovisni o parametru.

$I(\alpha) = \int_{a(\alpha)}^{b(\alpha)} f(x,\alpha)\mathrm{d}x \quad \Longrightarrow \quad I'(\alpha) = \int_{a(\alpha)}^{b(\alpha)} f'_\alpha(x,\alpha)\mathrm{d}x + b'(\alpha)f(b(\alpha),\alpha) - a'(\alpha)f(a(\alpha),\alpha).$

Ako granice a i b ne zavise od α tada $I'(\alpha) = \int\limits_a^b f'_\alpha(x,\alpha)\mathrm{d}x.$

Vektorska teorija polja. ...

Cirkulacija i fluks vektorskog polja.

$$C = \int\limits_c \vec{v}\,\mathrm{d}\vec{r} = \int\limits_c v_x\mathrm{d}x + v_y\mathrm{d}y + v_z\mathrm{d}z.$$

$$\Phi = \iint\limits_S \vec{v}\vec{n}\,\mathrm{d}S = \iint\limits_S v_x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + v_y\mathrm{d}x\mathrm{d}z + v_z\mathrm{d}x\mathrm{d}z.$$

Krive u prostoru

Kriva L u prostoru se zadaje parametarski na sljedeći način:

$$L: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}, \quad t \in I$$

(skalarni oblik), ili

$$L: \vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)), \quad t \in I$$

(vektorski oblik), gdje je $I \subseteq \mathbb{R}$ interval u širem smislu (otvoren, zatvoren, poluotvoren, konačan ili beskonačan), a f-je $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ neprekidne, diferencijabilne ili neprekidno-diferencijabilne, zavisno od potrebe.

Kriva L može još biti zadana i na sljedeće načine

$$L: \begin{cases} y = y(x), \\ z = z(x), \end{cases} \quad x \in I$$

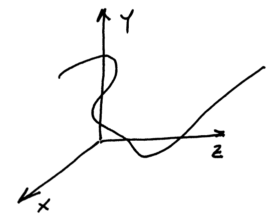
(eksplicitni oblik);

$$L: \begin{cases} F_1(x,y,z) = 0 \\ F_2(x,y,z) = 0 \end{cases}$$

(implicitni oblik).

Neka je $\vec{f}: [a,b] \to \mathbb{R}^3$
$t \to (x(t), y(t), z(t))$

vektor-vrijednosna f-ja, neprekidna na kompaktnom intervalu $[a,b]$ u $\mathbb{R}$. Kako t uzima vrijednost iz intervala $[a,b]$ to vrijednosti f-je $\vec{f}(t)$ ostavljaju trag kao skup tački u $\mathbb{R}^3$ koje zovemo graf f-je $\vec{f}$ ili kriva opisana sa $\vec{f}$. Kriva je kompaktan i povezan podskup od $\mathbb{R}^3$ zato što je neprekidna slika kompaktnog intervala. Samu f-ju $\vec{f}$ nekad zovemo put.



Često je korisno da zamislimo krivu kao trag čestice koja se pomjera. Interval $[a,b]$ tada možemo tumačiti kao vremenski interval a vektor $\vec{f}(t)$ kao određena pozicija čestice u prostoru u datom trenutku t. Ako prihvatimo ovo tumačenje, f-ju $\vec{f}$ često zovemo kretanje.

Različiti putevi mogu ostavljati iste krive. Npr. dvije kompleksno vrijednosne f-je $f(t) = e^{2\pi i t}$, $g(t) = e^{-2\pi i t}$, $0 \le t \le 1$, kao trag ostavljaju jedinični krug $x^2 + y^2 = 1$, ali ove tačke su posjećene u obrnutom smjeru. Isti krug se nacrta pet puta uz pomoć f-je $h(t) = e^{10\pi i t}$, $0 \le t \le 1$.

(#) Pokazati da kriva $L: x=\frac{t}{1+t^2+t^4}$, $y=\frac{t^2}{1+t^2+t^4}$, $z=\frac{t^3}{1+t^2+t^4}$, $t\in\mathbb{R}$ leži na nekoj sferi sa centrom $C(0,\frac{1}{2},0)$.

Rj. Opšti oblik jednačine sfere sa centrom $C(0,\frac{1}{2},0)$ poluprečnika R je

$$x^2+(y-\tfrac{1}{2})^2+z^2=R^2.$$

Ako uvrstimo našu krivu dobićemo

$$\left(\frac{t}{1+t^2+t^4}\right)^2+\left(\frac{t^2}{1+t^2+t^4}-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{t^3}{1+t^2+t^4}\right)^2=$$

$$\frac{t^2}{(1+t^2+t^4)^2}+\frac{(\overbrace{2t^2-(1+t^2+t^4)}^{2t^2-1-t^2-t^4})^2}{4(1+t^2+t^4)^2}+\frac{t^6}{(1+t^2+t^4)^2}=$$

$$=\frac{4t^2+(-1+t^2-t^4)^2+4t^6}{4(1+t^2+t^4)^2}=\frac{4t^2+1-t^2+t^4-t^2+t^4-t^6+t^4-t^6+t^8+4t^6}{4(1+t^2+t^4)^2}$$

$$=\frac{\overbrace{1+2t^2+3t^4+2t^6+t^8}^{=(1+t^2+t^4)^2}}{4\underbrace{(1+t^2+t^4)^2}}=\frac{1}{4}$$

$$=1+t^2+t^4+t^2+t^4+t^6+t^4+t^6+t^8=1+2t^2+3t^4+2t^6+t^8$$

Data kriva leži na sferi sa centrom $(0,\frac{1}{2},0)$ poluprečnika $R=\frac{1}{2}$.

(#) Pokazati da kriva $L: x=a\sin^2 t$, $y=b\sin t\cos t$, $z=c\cos t$ $(a,b,c>0)$ leži na nekom elipsoidu.

Rj. Jednačina elipsoida je $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

Pa izračunajmo $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}$

$$\frac{(a\sin^2 t)^2}{a^2}+\frac{(b\sin t\cos t)^2}{b^2}+\frac{(c\cos t)^2}{c^2}=$$

$$=\sin^4 t+\sin^2 t\cos^2 t+\cos^2 t=$$

$$=\sin^2 t\underbrace{(\sin^2 t+\cos^2 t)}_{=1}+\cos^2 t=\sin^2 t+\cos^2 t=1.$$

Date su jednačine krive u prostoru vektorskom obliku

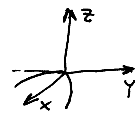
a) $\vec{r} = u\vec{i} + u^2\vec{j}$

b) $\vec{r} = t\vec{i} + t\vec{j}$

c) $\vec{r}(t) = a\cos t\,\vec{i} + b\sin t\,\vec{j}$, $t \in [0, 2\pi]$, $a>0$, $b>0$

Utvrditi o kojim krivima je riječ.

Rj. a) $\vec{r} = u\vec{i} + u^2\vec{j} = (u, u^2, 0)$



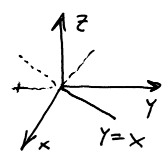
$$x = u \qquad x^2 = u^2$$
$$y = u^2 \qquad y = u^2 \Big\} \Rightarrow y = x^2$$
$$z = 0$$

$$\begin{cases} y = x^2 \\ z = 0 \end{cases}$$

parabola u xOy ravni

b) $\vec{r} = t\vec{i} + t\vec{j} = (t, t, 0)$

$$x = t$$
$$y = t \qquad \begin{cases} x = y \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{prava u } xOy \text{ ravni}$$
$$z = 0$$



c) $\vec{r} = a\cos t\,\vec{i} + b\sin t\,\vec{j} = (a\cos t, b\sin t, 0)$

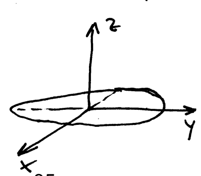
$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \\ z = 0 \end{cases} \qquad \begin{matrix} x^2 = a^2\cos^2 t \\ y^2 = b^2\sin^2 t \\ z = 0 \end{matrix}$$

cilj je eliminisati t

$$\cos^2 t = \frac{x^2}{a^2}, \quad \sin^2 t = \frac{y^2}{b^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

elipsa u xOy ravni



Odrediti projekciju krive $L: z = x^2 - y^2,\ x + y - z = 0$ na ravan xOy.

Rj.

$$z = x^2 - y^2$$
$$x + y - z = 0$$

Da bi odredili projekciju krive na xOy ravan potrebno je iz datog sistema eliminisati z.

$$z = x^2 - y^2$$
$$z = x + y$$

$$x^2 - y^2 = x + y$$
$$x^2 - x - y^2 - y = 0$$
$$x^2 - y^2 - (x+y) = 0$$
$$(x-y)(x+y) - (x+y) = 0$$
$$(x+y)(x-y-1) = 0$$
$$x + y = 0 \quad \text{ili} \quad x + y - 1 = 0$$

Projekcija je

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{i} \quad \begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Odrediti projekciju krive $L: x=y^2+z^2,\ x-2y+4z-4=0$ na ravan yOz.

Rj. Da bi odredili projekciju krive na yOz ravan potrebno je iz sistema

$$\frac{\begin{array}{l} x=y^2+z^2 \\ x-2y+4z-4=0 \end{array}}{}$$

eliminisati x.

$$\frac{\begin{array}{l} x=y^2+z^2 \\ x=2y-4z+4 \end{array}}{}$$

$$y^2-2y+z^2+4z-4=0$$

$$y^2-2\cdot y\cdot 1+1^2-1^2+z^2+2\cdot z\cdot 2+2^2-2^2-4=0$$

$$(y-1)^2+(z-2)^2=9$$

Projekcija je krug

$$\begin{cases} (y-1)^2+(z-2)^2=3 \\ x=0 \end{cases}.$$

Pokazati da kriva

$$x=\sin 2\varphi$$
$$y=1-\cos 2\varphi$$
$$z=2\cos\varphi$$

leži na sferi.

Rj. Jednačina sfere s centrom u koordinatnom početku, poluprečnika r^2, glasi

$$x^2+y^2+z^2=r^2$$

U našem slučaju

$$x^2+y^2+z^2=(\sin 2\varphi)^2+(1-\cos 2\varphi)^2+(2\cos\varphi)^2=$$

$$=\underline{\sin^2 2\varphi}+1-2\cos 2\varphi+\underline{\cos^2 2\varphi}+4\cos^2\varphi$$

$$=2-2\cos 2\varphi+4\cos^2\varphi=$$

$$=4\sin^2\varphi+4\cos^2\varphi=4.$$

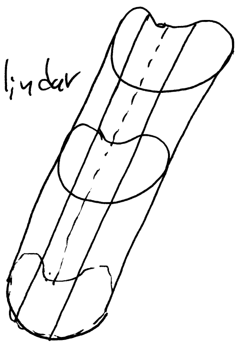
$$\boxed{\begin{array}{l} 1=\sin^2\varphi+\cos^2\varphi \\ \cos 2\varphi=\cos^2\varphi-\sin^2\varphi \\ \hline 1-\cos 2\varphi=2\sin^2\varphi \end{array}}$$

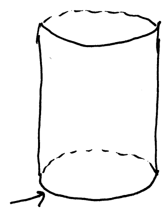
Slijedi da kriva leži na centralnoj sferi poluprečnika 2, pošto njene jednačine zadovoljavaju jednačinu te sfere.

Pokazati da je kriva $\vec{r} = \sin 2t\,\vec{i} + (1-\cos 2t)\,\vec{j} + 2\cos t\,\vec{k}$ presjek paraboličkog i kružnog valjka (cilindra).

Rj. valjak ili cilindar

cilindar





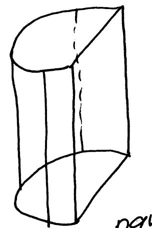
krug

kružni valjak

$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$

$(x-a)^2 + (z-b)^2 = r^2$

... i ostale kombinacije



parabolički valjak

$y = ax^2 + bx + c$

$x = ay^2 + bx + c$

$z = ax^2 + bx + c$

i ostale kombinacije

$x = \sin 2t$

$y = 1 - \cos 2t$

$z = 2\cos t$

$y - 1 = 1 - \cos 2t - 1 = \cos 2t$

$x^2 + (y-1)^2 = 1$

iz ovoga vidimo da data kriva pripada kružnom valjku

$y = 1 - \cos 2t$

$\frac{y}{2} = \frac{1}{2}(1 - \cos 2t)$

$\frac{y}{2} = \sin^2 t$

$$\begin{aligned} 1 &= \sin^2 t + \cos^2 t \\ \cos 2t &= \cos^2 t - \sin^2 t \\ \hline 1 - \cos 2t &= 2\sin^2 t \end{aligned}$$

$\frac{y}{2} + \left(\frac{z}{2}\right)^2 = 1 \Rightarrow \frac{y}{2} + \frac{z^2}{4} = 1 \quad /\cdot 4$

$2y + z^2 = 4$

$2y = -z^2 + 4$

$y = -\frac{1}{2}z^2 + 2$ iz ovoga vidimo da data kriva pripada paraboličkom valjku.

Data je kriva linija

$\vec{r} = \vec{a}\,t^2 + \vec{b}\,t + \vec{c}$ ($\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ konstantni vektori).

Pokazati da kriva leži u ravni, čiju jednačinu treba odrediti. Utvrditi o kojoj je krivoj riječ.

Rj.

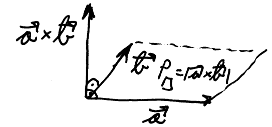
$\vec{r} = \vec{a}\,t^2 + \vec{b}\,t + \vec{c}$ je vektorska jednačina krive

Za vektore $\vec{a}$ i $\vec{b}$ moguć je tačno jedan od sljedeća dva slučaja 1° $\vec{a}$ i $\vec{b}$ nisu kolinearni

2° $\vec{a}$ i $\vec{b}$ su kolinearni

1° $\vec{a}$ i $\vec{b}$ nisu kolinearni.

Šta znamo za vektor $\vec{a}\times\vec{b}$ u ovom slučaju?



Pomnožimo vektorsku jednačinu krive skalarno vektorom $\vec{a}\times\vec{b}$:

$\vec{r}\cdot(\vec{a}\times\vec{b}) = (\vec{a}\,t^2 + \vec{b}\,t + \vec{c})\underbrace{(\vec{a}\times\vec{b})}_{\text{ovo je vektor } \perp a \text{ i } \perp b}$

$\vec{r}\cdot(\vec{a}\times\vec{b}) = \vec{c}\,(\vec{a}\times\vec{b})$

$\vec{r}(\vec{a}\times\vec{b}) - \vec{c}\,(\vec{a}\times\vec{b}) = 0$

$(\vec{r} - \vec{c})(\vec{a}\times\vec{b}) = 0$

Znamo da $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ i $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$.
Vektorskoj f-ji $\vec{r}$ možemo pridružiti određen skup tačaka $\vec{r} = (x, y, z)$ gdje su $x = x(s)$, $y = y(s)$ i $z = z(s)$ f-je koje zavise o parametru $s \in \mathbb{R}$.

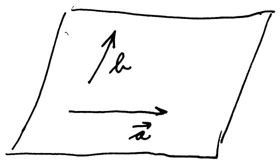
Sada

$\underbrace{(\vec{r} - \vec{c})}_{\substack{\text{vektor} \\ \text{(može se tumačiti} \\ \text{kao vektor)}}}(\vec{a}\times\vec{b}) = 0 \iff \begin{vmatrix} x - c_1 & y - c_2 & z - c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0$

$$\underbrace{\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3\end{vmatrix}}_{=A}(x-c_1) - \underbrace{\begin{vmatrix} a_1 & a_3\\ b_1 & b_3\end{vmatrix}}_{=B}(y-c_2)+\underbrace{\begin{vmatrix} a_1 & a_2\\ b_1& b_2\end{vmatrix}}_{=C}(z-c_3)=0$$

jednačina ravni koja se traži

O kojoj je krivoj riječ? Znamo da se kriva nalazi u ravni.



Odredimo jedinične međusobno ortogonalne vektore $\vec{e_1}$ i $\vec{e_2}$ u ravni vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

Za $\vec{e_1}$ uzmimo $\vec{e_1}=\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=\vec{a}_0$

$\vec{r} = \vec{a}t^2+\vec{b}t+\vec{c}$

$\vec{r}-\vec{c} = \vec{a}t^2+\vec{b}t$

Znamo $\vec{a} = |\vec{a}|\vec{e_1}$

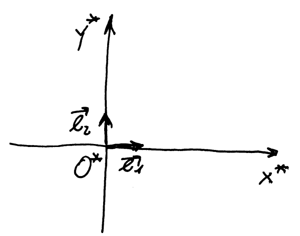
i znamo da $\exists\, b_1,b_2\in R$

$\vec{b} = b_1\vec{e_1}+b_2\vec{e_2}$

Označimo $|\vec{a}|$ sa a.

$\vec{r}-\vec{c} = t^2 a\vec{e_1}+t(b_1\vec{e_1}+b_2\vec{e_2})$

$\vec{r}-\vec{c} = (at^2+b_1t)\vec{e_1}+b_2t\vec{e_2}$



$\vec{r}$ je kriva u ravni, $\vec{r}-\vec{c}$ je i dalje kriva. Ako posmatramo koordinatni sistem $x^*O^*y^*$, gdje su koordinatne ose određene vektorima $\vec{e_1}$ i $\vec{e_2}$, jednačina krive $\vec{r}-\vec{c}$ glasi

$$\vec{r}-\vec{c}: \begin{cases} x^*=at^2+b_1t\\ y^*=b_2t\\ t\in R\end{cases}$$

U koordinatnom sistemu $x^*O^*y^*$ koordinate vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ su $\vec{a}=(a,0)$, $\vec{b}=(b_1,b_2)$

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ a&0&0\\ b_1&b_2&0\end{vmatrix} = \left(0,0,\begin{vmatrix}a&0\\b_1&b_2\end{vmatrix}\right)$$

Kako je $|\vec{a}\times\vec{b}|\neq 0$ to je $\begin{vmatrix}a&0\\b_1&b_2\end{vmatrix}\neq 0$ a time i $ab_2\neq 0$

pa se može odrediti $t=\frac{y^*}{b_2}$. Sad ako t uvrstimo u $x^*=at^2+b_1t$

imamo $x^*=a\left(\frac{y^*}{b_2}\right)^2+b_1\left(\frac{y^*}{b_2}\right)$

$x^*=\frac{a}{b^2}y^{*2}+\frac{b_1}{b_2}y^*$

$x^*=d_1y^{*2}+d_2y^*$

ovo je jednačina parabole

$x=ay^2+by+c$

⊃ ⊂

$a<0$ $a>0$

Riječ je o je jednačini parabole.

2° $\vec{a}$ i $\vec{b}$ su kolinearni vektori

a) Tada $\vec{a}=\lambda\vec{b}$ $(\vec{b}\neq 0)$

U ovom slučaju jednačina krive je

$\vec{r}=\lambda\vec{b}t^2+\vec{b}t+\vec{c}$

$\vec{r}=(\lambda t^2+t)\vec{b}+\vec{c}$

za $\lambda=0$ ovo je jednačina prave

za $\lambda\neq 0$ ovo je jednačina poluprave

ili

b) $\vec{b}=0$

U ovom slučaju jednačina krive je

$\vec{r}=\vec{a}t^2+\vec{c}$

ovo je jednačina poluprave

\# Data je kriva linija $\vec{r} = \vec{a}t^2 + \vec{b}t + \vec{c}$ ($\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ konstantni vektori), $\vec{a}$ i $\vec{b}$ nisu kolinearni. Pokazati da kriva leži u ravni.

Upute:

$\vec{a} \times \vec{b}$

$\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{a}$

$\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{b}$

$(\vec{r} - \vec{c})(\vec{a} \times \vec{b}) = 0$

$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$

$\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$

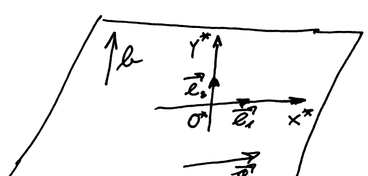
$\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$

[pogledati prethodni zadatak]

$$\begin{vmatrix} x(t) - c_1 & y(t) - c_2 & z(t) - c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0$$

\# Data je kriva linija $\vec{r} = \vec{a}t^2 + \vec{b}t + \vec{c}$ ($\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ konstantni vektori), $\vec{a}$ i $\vec{b}$ nisu kolinearni. Objasniti o kojoj je krivoj riječ, ako se zna da je kriva u ravni određena vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

Upute:



$\vec{e}_1 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \vec{a}_0$

$\vec{e}_2 \perp \vec{e}_1$ $\quad \vec{a} = |\vec{a}|\vec{e}_1 = a\vec{e}_1$

$\vec{b} = b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2$

$\vec{r} - \vec{c}$ je kriva

$\vec{r} - \vec{c}: \begin{cases} x^* = at^2 + b_1 t \\ y^* = b_2 t \\ t \in \mathbb{R} \end{cases}$ $\quad \dots \; ab_2 \neq 0 \; \dots \quad x^* = \frac{a}{b_2} y^{*2} + \frac{b_1}{b_2} y^*$

jednačina parabole

\# Kriva je određena kao presjek sfere $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ i cilindra $x^2 + y^2 = ax$. Pokazati da je projekcija krive na xOz-ravan dio parabole. Napisati jednačinu krive u parametarskom obliku.

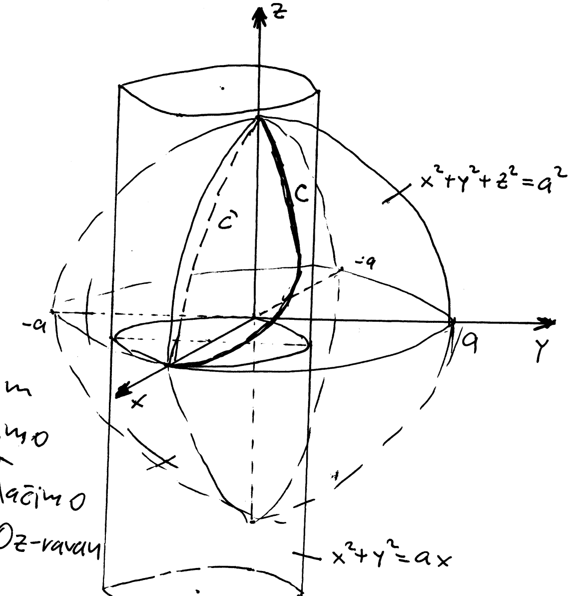
Rj.

$x^2 + y^2 = ax$

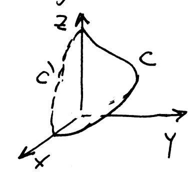
$x^2 - ax + y^2 = 0$

$x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{a}{2} + \frac{a^2}{4} + y^2 = \frac{a^2}{4}$

$\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2$



Krivu određenu presjekom sfere i cilindra označimo sa C, a sa C' označimo presjek krive C na xOz-ravan



$C: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \\ x^2 + y^2 = ax \end{cases}$

Projekciju C' krive C na xOz-ravan dobićemo kada iz jednačine krive C na neki način eliminišemo Y (ovo nije isto kao kad stavimo $Y=0$) → ŠTA SE DOBIJE KAD UVRSTIMO $Y=0$?

$$\begin{array}{r} x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \\ - \quad x^2 + y^2 \quad\;\; = ax \\ \hline z^2 = a^2 - ax \end{array}$$

$ax = -z^2 + a^2 \quad /:a$

$x = -\frac{1}{a}z^2 + a$

$x = -\frac{1}{a}z^2 + a$

ovo je jednačina parabole

u našem slučaju $0 \le x \le a$

ovo je dio parabole.

Kako parametrizirati datu krivu?

$$C: \begin{cases} (x-\frac{a}{2})^2 + y^2 = \frac{a^2}{4} \\ x^2+y^2+z^2=a^2 \end{cases}$$

U ravan možemo uvesti polarne koordinate pa ćemo na osnovu formula izvući formulu za z.

$$x = \frac{a}{2} + \frac{a}{2}\cos t$$
$$y = \frac{a}{2}\sin t$$

$$z^2 = a^2 - x^2 - y^2 = a^2 - \left(\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{2}\cos t + \frac{a^2}{4}\cos^2 t + \frac{a^2}{4}\sin^2 t\right)$$
$$= a^2 - \left(\frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2}\cos t\right) = \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{2}\cos t$$
$$z^2 = \frac{a^2}{2}(1-\cos t) = \frac{a^2}{2}\Big(\underbrace{\sin^2\tfrac{t}{2} + \cos^2\tfrac{t}{2}}_{=1} - \underbrace{\left(\cos^2\tfrac{t}{2} - \sin^2\tfrac{t}{2}\right)}_{=\cos t}\Big)$$
$$z^2 = a^2\sin^2\frac{t}{2}$$
$$z = a\sin\frac{t}{2} \qquad t\in(0,2\pi)$$

Parametarske jednačine krive C su dakle

$$C: \begin{cases} x = \frac{a}{2} + \frac{a}{2}\cos t \\ y = \frac{a}{2}\sin t \\ z = a\sin\frac{t}{2} \\ 0\le t\le 2\pi \end{cases}$$

Ako umjesto $\frac{t}{2}$ pišemo t ovo je ekvivalentno sa

$$C: \begin{cases} x = a\cos^2 t \\ y = a\sin t\cos t \\ z = a\sin t \\ 0\le t\le 2\pi \end{cases}$$

Kriva L je data kao presjek dvije površi

$$L: \begin{cases} z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{x}{a} + \frac{y}{b} \end{cases}.$$

Krivu L napisati u parametarskom obliku.

Rj. - upute:
Presjek cilindrične površi $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{x}{a} + \frac{y}{b}$ i ravni $z=0$ je elipsa

$$\frac{(x-\frac{a}{2})^2}{\frac{a^2}{2}} + \frac{(y-\frac{b}{2})^2}{\frac{b^2}{2}} = 1$$

čije su parametarske jednačine $x = \frac{a}{2} + \frac{a}{\sqrt{2}}\cos t$,

$$y = \frac{b}{2} + \frac{b}{\sqrt{2}}\sin t$$
$$t\in[0,2\pi]$$

Dalje, na osnovu $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ nalazimo

$$z = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos t + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin t$$

Prema tome

$$L: \begin{cases} x = \frac{a}{2} + \frac{a}{\sqrt{2}}\cos t \\ y = \frac{b}{2} + \frac{b}{\sqrt{2}}\sin t \\ z = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos t + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin t \end{cases} \quad t\in[0,2\pi].$$

Vektor tangente

Neka je data kriva L u prostoru zadana parametarski na sljedeći način

$$L: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}, \quad t \in I$$

(u skalarnom obliku)

i neka tačka $M_0(x_0, y_0, z_0)$ pripada L.

Jednačina tangente na krivu L u tački $M_0(x_0, y_0, z_0)$ glasi

$$t: \frac{x - x_0}{t_1} = \frac{y - y_0}{t_2} = \frac{z - z_0}{t_3}$$

gdje je $\vec{t} = (t_1, t_2, t_3) = \vec{0}$ vektor tangente.

Ako je kriva data u vektorskom obliku $\vec{r} = \vec{r}(t)$ tada je

$$\vec{t} = \dot{\vec{r}} \quad \left(\dot{\vec{r}} = \frac{d\vec{r}}{dt}\right)$$

Odrediti jednačinu tangente krive $L: x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $z = 4a \sin \frac{t}{2}$ u tački $M_0(t = \frac{\pi}{2})$. Odrediti ugao koji dobijena tangenta zaklapa sa z osom.

Rj: Za $t = \frac{\pi}{2}$ iz datog sistema f-ja dobijamo da je

$$x_0 = x\left(\frac{\pi}{2}\right) = a\left(\frac{\pi}{2} - 1\right),$$

$$y_0 = y\left(\frac{\pi}{2}\right) = a(1 - 0) = a$$

$$z_0 = z\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4a \sin \frac{\pi}{4} = 2a\sqrt{2}$$

pa je $M_0\left(a\left(\frac{\pi}{2} - 1\right), a, 2a\sqrt{2}\right)$

Prisjetimo se

Ako tačka $M_0(x_0, y_0, z_0)$ pripada krivoj $L: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \\ t \in I \end{cases}$ tada jednačina tangente na krivu L u tački M_0 glasi

$$\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3}$$

gdje je $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) \neq 0$ $\left(\vec{a} = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))\right)$ vektor tangente.

$$x' = a(1 - \cos t), \quad y' = a \sin t, \quad z' = 4a \cos \frac{t}{2} \cdot \frac{1}{2} = 2a \cos \frac{t}{2}$$

$$x'\left(\frac{\pi}{2}\right) = a, \quad y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = a, \quad z'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2a \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}\, a$$

$$\Rightarrow \frac{x - a\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)}{1} = \frac{y - a}{1} = \frac{z - 2a\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$ jednačina tražene tangente

Odredimo ugao koji dobijena tangenta zaklapa sa z-osom.

Vektor tangente u tački M_0 je $\vec{t}=(1,1,\sqrt{2})$.

z-osa ima vektor pravca $\vec{p}=(0,0,1)$

$$\vec{p}\cdot\vec{t}=|\vec{p}||\vec{t}|\cos\angle(\vec{p},\vec{t}) \Rightarrow \cos\angle(\vec{p},\vec{t})=\frac{\vec{p}\cdot\vec{t}}{|\vec{p}||\vec{t}|}$$

$$\vec{p}\cdot\vec{t}=\sqrt{2}$$

$$|\vec{p}|=1, \quad |\vec{t}|=\sqrt{1+1+2}=\sqrt{4}=2$$

$$\cos\angle(\vec{p},\vec{t})=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Ugao između tangente i z-ose je $\frac{\pi}{4}$ rad.

\# Naći ugao između tangente na krivu

$$x=a\cos t$$
$$y=a\sin t$$
$$z=bt$$

i vektora $\vec{r}$ koji spaja koordinatni početak sa tačkom dodira.

Rj.

Ako je u trodimenzionalnom euklidskom prostoru kriva zadana jednačinom $\vec{r}=\vec{r}(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}+z(t)\vec{k}$, ili u parametarskom obliku $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$ vektor tangente određujemo formulama:

$$\vec{t}=\dot{\vec{r}} \qquad \left(\dot{\vec{r}}=\frac{d\vec{r}}{dt}\right)$$

Vektor tangente na datu krivu u tački t je

$$\vec{t}=(-a\sin t, a\cos t, b).$$

Primetimo da nije data konkretno neka tačka $M_0(x_0,y_0,z_0)$ u kojoj tražimo tangentu na krivoj. Zbog ovoga, promjenjivu t možemo tumačiti fiksiranom. Ugao između tangente na krivu i vektora $\vec{r}$ je jednak uglu između vektora tangente $\vec{t}$ i vektora $\vec{r}$.

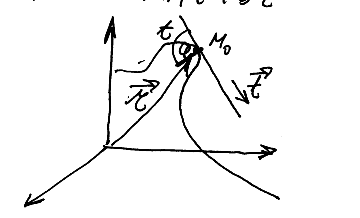
Vektor $\vec{r}$ koji spaja koordinatni početak sa tačkom dodira t izgleda

$$\vec{r}=(a\cos t, a\sin t, bt)$$

Znamo $\vec{t}\cdot\vec{r}=|\vec{t}||\vec{r}|\cos\angle(\vec{t},\vec{r})$

$$\cos\angle(\vec{t},\vec{r})=\frac{\vec{t}\cdot\vec{r}}{|\vec{t}||\vec{r}|}=\frac{-a^2\sin t\cos t+a^2\sin t\cos t+b^2t}{\sqrt{a^2\sin^2 t+a^2\cos^2 t+b^2}\sqrt{a^2\cos^2 t+a^2\sin^2 t+b^2t^2}}$$

$$\cos\angle(\vec{t},\vec{r})=\frac{b^2t}{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{a^2+b^2t^2}}$$



U kojim tačkama krive $L: x=3t-t^3,\ y=3t^2,\ z=3t+t^3$ je tangenta krive paralelna ravni $3x+y+z+2=0$?

Upute:

Vektor tangente u proizvoljnoj tački je oblika $(x'(t), y'(t), z'(t)) = 3(1-t^2, 2t, 1+t^2)$, pa za vektor tangente možemo uzeti vektor $\vec{t}=(1-t^2, 2t, 1+t^2)$.

Vektor normale date ravni je

$$\vec{n}=(3,1,1)$$

Da bi tangente krive bile paralelne ravni neophodno je $\vec{t}\perp\vec{n}$ tj. $\vec{t}\cdot\vec{n}=0$, što daje jednačinu

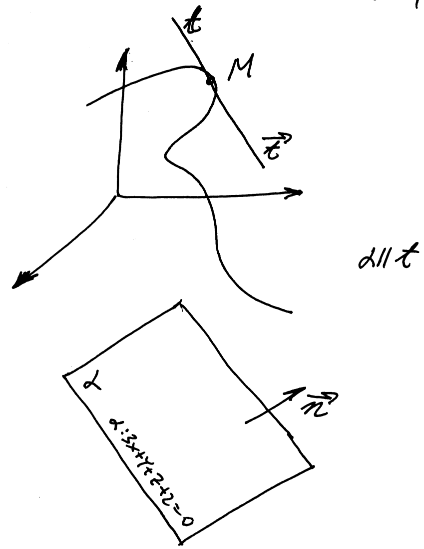
$$t^2-t-2=0.$$

Odavde je $t=-1$ ili $t=2$. Za $t=-1$ imamo tačku krive

$$M_1(-2,3,-4)$$

a za $t=2$ tačku

$$M_2(-2,12,14).$$



Odrediti jednačinu tangente krive $L: x=e^t,\ y=e^{-t},\ z=t^2$ u tački $M_0(t=1)$. Odrediti ugao koji dobijena tangenta zaklapa sa x-osom.

Rj.

Za $t=1$ iz jednačine krive L dobijamo

$$x_0=e$$
$$y_0=e^{-1}$$
$$z_0=z(1)=1$$

pa tražimo jednačinu tangente krive L u tački $M_0(e,e^{-1},1)$

Prisjetimo se

Ako tačka $M_0(x_0,y_0,z_0)$ pripada krivoj $L: \begin{cases} x=x(t)\\ y=y(t)\\ z=z(t)\\ t\in I\end{cases}$

tada jednačina tangente na krivu L u tački M_0 glasi

$$\frac{x-x_0}{t_1}=\frac{y-y_0}{t_2}=\frac{z-z_0}{t_3}$$

gdje je $\vec{t}=(t_1,t_2,t_3)$ vektor tangente $(\vec{t}=\vec{r}\,')$.

$$\begin{aligned}\dot{x}&=e^t\\ \dot{y}&=-e^{-t}\\ \dot{z}&=2t\end{aligned} \quad\Rightarrow\quad \begin{aligned}\dot{x}(1)&=e\\ \dot{y}(1)&=-e^{-1}\\ \dot{z}(1)&=2\end{aligned} \quad\Rightarrow\quad \vec{t}=(e,e^{-1},2)$$

Jednačina tangente u tački M_0 je $\dfrac{x-e}{e}=\dfrac{y-e^{-1}}{e^{-1}}=\dfrac{z-1}{2}$.

Da bi odredili ugao između tangente i x-ose, mi u stvari trebamo odrediti ugao između vektora tangente $\vec{t}$ i vektora pravca x-ose $\vec{p}=(1,0,0)$

$$\vec{p}\cdot\vec{t}=|\vec{p}|\cdot|\vec{t}|\cdot\cos\measuredangle(\vec{p},\vec{t}) \Rightarrow \cos\measuredangle(\vec{p},\vec{t})=\frac{\vec{p}\cdot\vec{t}}{|\vec{p}||\vec{t}|}$$

$$\vec{p}\cdot\vec{t} = (1,0,0)\cdot(e, e^{-1}, 2) = e$$

$$|\vec{p}| = 1$$

$$|\vec{t}| = \sqrt{e^2+e^{-2}+4}$$

$$\cos\angle(\vec{p},\vec{t}) = \frac{e}{\sqrt{e^2+e^{-2}+4}}$$

$$\angle(\vec{p},\vec{t}) = \arccos\frac{e}{\sqrt{e^2+e^{-2}+4}}$$

traženi ugao.

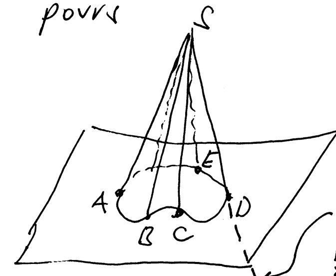
Dokazati da kriva

$$x = e^t\cos t$$
$$y = e^t\sin t$$
$$z = e^t$$

siječe izvodnicu konusa na kojem kriva leži, pod konstantnim uglom.

Rj.

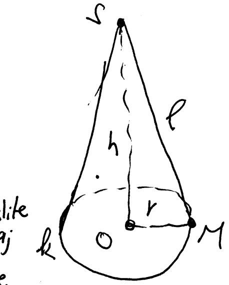
izvodnica (generatrisa) - prava koja pri svom kretanju siječe datu liniju i pri tome formira (opisuje) pravolinijsku površ



zamislite da ovaj konac čiji je kraj tačka S, pomjeramo po krivoj

primjer konusa

$p(S,A)$, $p(S,E)$, $p(S,D)$, $p(B,S)$, $p(C,S)$ su izvodnice



primjer kružnog konusa (osnova konusa je krug)

SM primjer izvodnice konusa

jednačine konusa

$x^2+y^2=z^2$

$x^2+z^2=y^2$

$y^2+z^2=x^2$

$\vdots$

Pronađimo prvo jednačinu konusa na kojem kriva leži.

$$x^2+y^2 = (e^t\cos t)^2+(e^t\sin t)^2 = e^{2t} = z^2$$

$x^2+y^2=z^2$ ovo je jednačina kružnog konusa čije je tjeme u koordinatnom početku a osa simetrije je z-osa

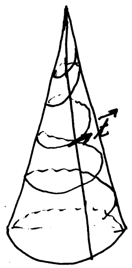
Obilježimo sa $\vec{t}$ vektor tangente na krivu u nekoj tački M.

vektor tangente određujemo formulom

$$\vec{t} = \dot{\vec{r}} \quad \left(\dot{\vec{r}} = \frac{d\vec{r}}{dt}\right)$$

$$\vec{t} = (e^t\cos t + e^t(-\sin t),\ e^t\sin t + e^t\cos t,\ e^t)$$

$$= (e^t(\cos t - \sin t),\ e^t(\sin t + \cos t),\ e^t)$$



Obilježimo sa $\vec{r}$ vektor položaja tačke M

$$\vec{r} = (e^t\cos t,\ e^t\sin t,\ e^t)$$

Znamo

$$\vec{t}\cdot\vec{r} = |\vec{t}||\vec{r}|\cos\angle(\vec{t},\vec{r})$$

Zbog činjenice da je vrh konusa u tjemenu koordinatnog početka ugao $\cos\angle(\vec{t},\vec{r})$ treba da bude konstantan (tim dokazom bi završili zadatak):

$$|\vec{t}| = \sqrt{e^{2t}(\cos t - \sin t)^2 + e^{2t}(\sin t + \cos t)^2 + e^{2t}} =$$

$$= \sqrt{e^{2t}(\cos^2 t - \cancel{2\cos t\sin t} + \sin^2 t + \sin^2 t + \cancel{2\sin t\cos t} + \cos^2 t + 1)}$$

$$= e^t\sqrt{3}$$

$$|\vec{r}| = \sqrt{e^{2t}\cos^2 t + e^{2t}\sin^2 t + e^{2t}} = e^t\sqrt{2}$$

$$\vec{t}\cdot\vec{r} = e^{2t}(\cos^2 t - \cos t\sin t) + e^{2t}(\sin^2 t + \cos t\sin t) + e^{2t}$$

$$= 2e^{2t}$$

$$\cos\angle(\vec{t},\vec{r}) = \frac{\vec{t}\cdot\vec{r}}{|\vec{t}||\vec{r}|} = \frac{2e^{2t}}{\sqrt{3}\,e^t\cdot\sqrt{2}\,e^t} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{4}{6}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$\cos\angle(\vec{t},\vec{r}) = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

time je tvrdnja zadatka dokazana.

(#) Vektor tangente $\vec{t} = \frac{1}{2t^2+9}(9, 6t, 2t^2)$ zaklapa isti ugao sa konstantnim pravcem $\vec{p} = (p_1, p_2, p_3)$ (gdje je $p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{R}$, $|\vec{p}| = 1$) bez obzira na vrijednost t. Odrediti pravac $\vec{p}$.

Uputa:

$|\vec{t}| = 1$

$|\vec{p}| = 1$ $\quad \vec{p} = (p_1, p_2, p_3)$, $\quad \vec{p} = ?$ tj. $p_1 = ?, p_2 = ?, p_3 = ?$

$$\vec{t}\cdot\vec{p} = |\vec{t}|\cdot|\vec{p}|\cdot\underbrace{\cos\overbrace{\angle(\vec{t},\vec{p})}^{=\alpha}}_{=c} = c$$

$$\vec{t}\cdot\vec{p} = \frac{1}{2t^2+9}(9p_1 + 6tp_2 + 2t^2p_3) = c$$

$$9p_1 + 6tp_2 + 2t^2p_2 = c(2t^2+9)$$

$$(2p_3 - 2c)t^2 + 6p_2t + 9(p_1 - c) = 0$$

$$p_3 = c, \quad p_2 = 0, \quad p_1 = c$$

$$|\vec{p}| = 1, \quad \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{2c} = 1$$

$$c = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\vec{p}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\vec{p}_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Dokazati da tangente na krivu $C: \begin{cases} x^2 = 3y \\ 2xy = 9z \end{cases}$ obrazuju konstantan ugao sa pravcem koji ima vektor pravca $\vec{a} = (1,0,1)$.

Rj. Napišimo jednačinu krive C u parametarskom obliku

$x = t \Rightarrow 3y = t^2$, $y = \frac{1}{3}t^2$, $z = \frac{2}{9}xy$, $z = \frac{2}{9}t \cdot \frac{1}{3}t^2$

$$C: \begin{cases} x = t \\ y = \frac{1}{3}t^2 \\ z = \frac{2}{27}t^3 \\ t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Posmatrajmo vektor $\vec{a} = (1,0,1)$ i obilježimo sa α ugao između $\vec{t}$ i $\vec{a}$.

$$\vec{t} \cdot \vec{a} = |\vec{t}||\vec{a}| \cos\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{\vec{t} \cdot \vec{a}}{|\vec{t}||\vec{a}|}$$

$\vec{t} = \dot{\vec{r}} = (1, \frac{2}{3}t, \frac{2}{9}t^2)$ vektor tangente

$$|\vec{t}| = \sqrt{1 + \frac{4}{9}t^2 + \frac{4}{81}t^4} = \sqrt{\frac{1}{81}}\sqrt{81 + 9 \cdot 4t^2 + 4t^4} = \frac{1}{9}\sqrt{(2t^2+9)^2} = \frac{2}{9}t^2 + 1$$

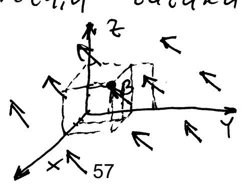
$$\vec{t} \cdot \vec{a} = 1 + \frac{2}{9}t^2$$

$$\cos\alpha = \frac{1 + \frac{2}{9}t^2}{\sqrt{2}\left(1 + \frac{2}{9}t^2\right)} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Ovo znači da svaki vektor tangente krive C zaklapa sa vektorom $\vec{a}$ ugao od $\frac{\pi}{4}$.

Navedimo primjer konkretnih tačaka koje imaju vektor pravca $\vec{a} = (1,0,1)$

$A(2,2,2)$, $B(3,2,3)$ $\}$ $\vec{AB} = (1,0,1)$



$C(-4,2,3)$, $D(-3,2,4)$ $\}$ $\vec{CD} = (1,0,1)$

$E(7,-2,3)$, $F(8,-2,4)$ $\}$ $\vec{EF} = (1,0,1)$

Pokazati da tangente krive $C: \begin{cases} x^2 = 3y \\ 2xy = 9z \end{cases}$ zatvaraju stalan ugao sa jednim konstantnim pravcem. Nađi taj pravac i taj ugao.

Rj. Napišimo prvo jednačinu date krive C u vektorskom obliku. Pokušajmo je parametrizirati pomoću familije pravih.

Stavimo $x = t \Rightarrow y = \frac{1}{3}t^2$

$$2 \cdot t \cdot \frac{1}{3}t^2 = 9z \Rightarrow z = \frac{2}{27}t^3$$

Prema tome $C: \vec{r} = (t, \frac{1}{3}t^2, \frac{2}{27}t^3)$.

Odredimo vektor tangente na datu krivu

$$\vec{t} = \dot{\vec{r}} = \frac{d\vec{r}}{dt} = (1, \frac{2}{3}t, \frac{2}{9}t^2)$$

$$|\vec{t}| = \sqrt{1 + \frac{4}{9}t^2 + \frac{4}{81}t^4} = \sqrt{\frac{1}{81}}\sqrt{81 + 9 \cdot 4t^2 + 4t^4} = \frac{1}{9}\sqrt{\underbrace{4t^4 + 36t^2 + 81}_{(2t^2+9)^2}}$$

$$|\vec{t}| = \frac{1}{9}(2t^2 + 9)$$

$$\vec{t}_0 = \frac{\vec{t}}{|\vec{t}|} = \frac{(9, 6t, 2t^2)}{2t^2 + 9}$$ jedinični vektor tangente

Neka je $\vec{p}_0 = (p_1, p_2, p_3)$ jedinični vektor traženog pravca.

$$\vec{t}_0 \cdot \vec{p}_0 = |\vec{t}_0||\vec{p}_0| \cos\underbrace{\measuredangle(\vec{t}_0, \vec{p}_0)}_{\substack{\text{prema pretpostavci} \\ \text{ovo je uvijek isti ugao} \\ \text{(ovo treba biti)}}} = 1 \cdot 1 \cdot \text{constanta} = c$$

$$\vec{t}_0 \cdot \vec{p}_0 = \frac{1}{2t^2 + 9}\left[9p_1 + 6tp_2 + 2t^2p_3\right] = c$$

$$9p_1 + 6tp_2 + 2t^2p_3 = c(2t^2 + 9)$$

$(2p_3-2c)t^2+6p_2 t+9(p_1-c)=0$

primjetimo sad da će ova jednačina identički po t biti zadovoljena akko

$p_3=c,\ p_2=0,\ p_1=c$

Koristeći još uslov $|\vec{p}|=1$, dobija se $\sqrt{2c^2}=1$

$$c=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

1°

$$\vec{p}_0=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Sada ako u jdnačini vektora tangente $\vec{t}=(1,\frac{2}{3}t,\frac{2}{9}t^2)$ uzmemo neko konkretno t npr. $t=3$ imamo $\vec{t}=(1,2,2)$

(smijemo uzeti proizvoljno t zato što sve tangente krive zatvaraju isti ugao sa pravcem $\vec{p}$)

$\vec{t}\cdot\vec{p}_0=\frac{1}{\sqrt{2}}+0+\frac{2}{\sqrt{2}}=\frac{3}{\sqrt{2}}$

$|\vec{t}|=\sqrt{9}=3$

$|\vec{p}_0|=1$

$$\cos\sphericalangle(\vec{t},\vec{p}_0)=\frac{\vec{t}\cdot\vec{p}_0}{|\vec{t}||\vec{p}_0|}=\frac{\frac{3}{\sqrt{2}}}{\frac{3}{1}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$\theta=\frac{\pi}{4}$ traženi ugao

2° $\vec{p}_0=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},0,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$\vec{t}=(1,2,2)$

$t\cdot\vec{p}_0=-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{2}{\sqrt{2}}=-\frac{3}{\sqrt{2}}$

$|\vec{t}|=3$

$|\vec{p}_0|=1$

$$\cos\sphericalangle(\vec{t},\vec{p}_0)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

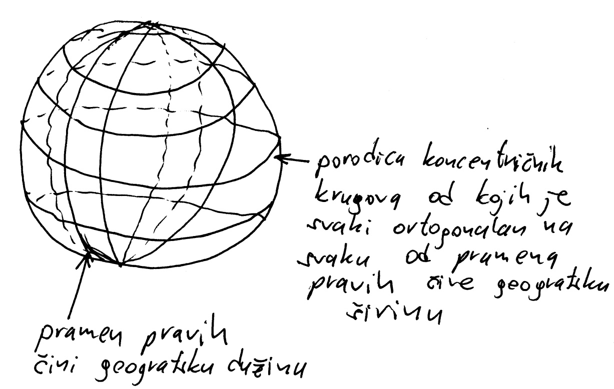
$\theta=\frac{3\pi}{4}$ traženi ugao

(na osnovu 1° ovo je i trebalo dobiti)

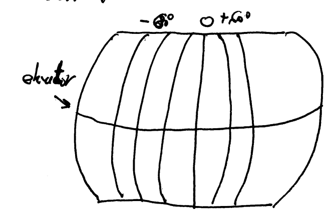
\# Kriva koja se naziva loksodroma određena je jednačinom $\phi=a\ln tg(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2})$, gdje je θ geografska širina a ϕ dužina tačke na sferi. Dokazati da ona siječe merdijane sfere pod uglom α tako da je $tg\,\alpha=a$. (Isto tako poznato je da $\phi'(\theta)=-\frac{a}{\cos\theta}$).

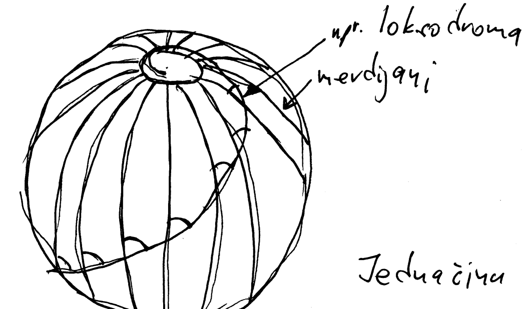
čiji je prvi izvod po θ

Rj.



Na geografskoj karti





Po definiciji loksodroma je linija dvostruke krivine, koja leži na sferi, sferoidu ili bilo kakvoj drugoj obrtnoj površi.

Jednačina sfere u polarnom obliku je (može biti)

$x=r\cos\theta\cos\phi$

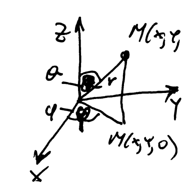
$y=r\cos\theta\sin\phi$

$z=r\sin\theta$

Kako je loksodroma na nekoj sferi poluprečnika r to je njena jednačina u parametarskom obliku

$$\begin{cases} x=r\cos\theta\cos\phi \\ y=r\cos\theta\sin\phi \\ z=r\sin\theta \\ \phi=a\ln tg(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}) \\ 0\le\theta\le 2\pi \end{cases}$$

parametar je θ (r je fiksirano)



vektor tangente određujemo formulom $\vec{t} = \dot{\vec{r}}$ $\left(\dot{\vec{r}} = \frac{d\vec{r}}{dt}\right)$

vektor tangente na loksodromu je

$$\vec{t} = (-r\sin\theta\cos\phi + r\cos\theta(-\sin\phi)\cdot\phi',$$
$$-r\sin\theta\sin\phi + r\cos\theta\cos\phi\cdot\phi', \; r\cos\theta)$$

prema postavci zadatka $\phi' = -\frac{a}{\cos\theta}$

$$(-r\sin\theta\cos\phi + ra\sin\phi, \; -r\sin\theta\sin\phi - ra\cos\phi, \; r\cos\theta)$$

Jednačina merdijana sa dužinom ϕ je

$$x = r\cos\theta\cos\phi$$
$$y = r\cos\theta\sin\phi$$
$$z = r\sin\theta$$

gdje je r i ϕ fiksirano, a promjenjiva je θ

Vektor tangente $\vec{t_1}$ na merdijan u proizvoljnoj tački θ je

$$\vec{t_1} = (-r\sin\theta\cos\phi, \; -r\sin\theta\sin\phi, \; r\cos\theta).$$

$$\vec{t}\cdot\vec{t_1} = |\vec{t}||\vec{t_1}|\cos\sphericalangle(\vec{t},\vec{t_1}) \Rightarrow \cos\sphericalangle(\vec{t},\vec{t_1}) = \frac{\vec{t}\cdot\vec{t_1}}{|\vec{t}||\vec{t_1}|}$$

$$\vec{t}\cdot\vec{t_1} = r^2\sin^2\theta\cos^2\phi - ar^2\sin\theta\sin\phi\cos\phi + r^2\sin^2\theta\sin^2\phi +$$
$$+ar^2\sin\theta\sin\phi\cos\phi + r^2\cos^2\theta = r^2\sin^2\theta\underbrace{(\cos^2\phi+\sin^2\phi)}_{=1} +$$
$$+r^2\cos^2\theta = r^2\sin^2\theta + r^2\cos^2\theta = r^2$$

$$(+2ar^2\sin\theta\sin\phi\cos\phi)$$
$$|\vec{t}|^2 = r^2\sin^2\theta\cos^2\phi + r^2a^2\sin^2\phi + r^2\sin^2\theta\sin^2\phi + r^2a^2\cos^2\phi + r^2\cos^2\theta$$
$$(-2ar^2\sin\theta\sin\phi\cos\phi)$$
$$= r^2\sin^2\theta + r^2a^2 + r^2\cos^2\theta = r^2 + r^2a^2 \Rightarrow |\vec{t}| = r\sqrt{1+a^2}$$

Slično $|\vec{t_1}| = r \Rightarrow \cos\sphericalangle(\vec{t},\vec{t_1}) = \frac{r^2}{r^2\sqrt{1+a^2}}$

$\alpha = \sphericalangle(\vec{t},\vec{t_1}) \Rightarrow \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}$ $\quad$ $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \sin\alpha = \frac{a}{\sqrt{1+a^2}}$

$\Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = a$
q.e.d.

$$S : F(x, y, z) = 0 \qquad (6)$$

(*implicitni* oblik).

1° Ako tačka $M_0(x_0, y_0, z_0)$ pripada L, tj. ako se koordinate x_0, y_0, z_0 te tačke dobijaju iz sistema (1) za neko $t = t_0$ (ako je u pitanju parametarski oblik), ili za $x = x_0$ iz (2), ili, pak, zadovoljavaju sistem (3), tada *jednačina tangente na krivu L u tački $M_0(x_0, y_0, z_0)$* glasi:

$$\tau : \frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3}. \qquad (7)$$

gde je $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) \neq \vec{0}$ vektor tangente, koji u zavisnosti od načina zadavanja krive L ((1), (2) ili (3)) ima redom oblik:

$$\vec{a} = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)); \qquad (8)$$

$$\vec{a} = (1, y'(x_0), z'(x_0)); \qquad (9)$$

$$\vec{a} = \left(\begin{vmatrix} F'_{1y} & F'_{1z} \\ F'_{2y} & F'_{2z} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} F'_{1z} & F'_{1x} \\ F'_{2z} & F'_{2x} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} F'_{1x} & F'_{1y} \\ F'_{2x} & F'_{2y} \end{vmatrix} \right) \qquad (10)$$

(gde su svi parcijalni izvodi izračunati u tački M_0).

Jednačina normalne ravni η krive L u tački $M_0(x_0, y_0, z_0)$ glasi:

$$\eta : a_1(x - x_0) + a_2(y - y_0) + a_3(z - z_0) = 0, \qquad (11)$$

gde je $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ $(\neq \vec{0})$ vektor tangente krive L u tački M_0, a koji ima prethodno spomenute oblike (zavisno od načina zadavanja krive L).

2° *Jednačina tangentne ravni površi S u tački $M_0(x_0, y_0, z_0)$* te površi glasi:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0, \qquad (12)$$

gde je $\vec{n} = (A, B, C)$ vektor normale te površi u tački M_0. U zavisnosti od oblika jednačine površi S, (4), (5) ili (6), imamo redom sledeće vrednosti vektora $\vec{n}$:

$$\vec{n} = \left(\begin{vmatrix} y'_u & z'_u \\ y'_v & z'_v \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} z'_u & x'_u \\ z'_v & x'_v \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix} \right) \qquad (13)$$

gde su parcijalni izvodi izračunati za $u = u_0$ i $v = v_0$, koji odgovaraju tački M_0;

$$\vec{n} = (z'_x(x_0, y_0), z'_y(x_0, y_0), -1); \qquad (14)$$

$$\vec{n} = (F'_x(x_0, y_0, z_0), F'_y(x_0, y_0, z_0), F'_z(x_0, y_0, z_0)). \qquad (15)$$

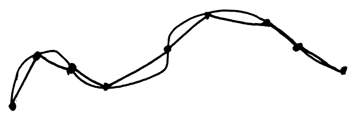
Jednačine normale površi u tački $M_0(x_0, y_0, z_0)$ te površi glase:

$$\frac{x - x_0}{A} = \frac{y - y_0}{B} = \frac{z - z_0}{C},$$

gde je $\vec{n} = (A, B, C)$ prethodno spomenuti vektor normale površi koji ima jedan od oblika (13), (14) ili (15).

Rektifikacione krive, i dužina luka
i prirodna parametrizacija krive

U ovoj lekciji želimo da uvedemo koncept dužine luka krive. Ideja je da aproksimiramo krivu uz pomoć uzastopno upisanih nadovezanih duži, (poligonalne linije) tehnika koju smo naučili iz antičke geometrije. Intuicija nam govori da dužina poligonalne linije (uzastopno upisanih nadovezanih duži) nebi trebala preći dužinu krive (s obzirom da je prava linija najkraći put između dvije tačke, iz čega bi mogli naslutiti da će dužina krive biti jednaka gornjoj granici skupa dužina svih mogućih poligonalnih linija. Prema tome, izgleda da možemo, na prirodan način, definisati dužinu krive kao najmanja gornja granica dužina svih mogućih upisanih poligonalnih linija.



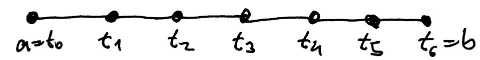
Za većinu krivih koje se pojavljuju u praksi, ovo nam daje korisnu definiciju dužine luka. Kakogod, kao što ćemo vidjeti, postoje krive za koje nije moguće naći gornju granicu dužina upisanih poligonalnih linija. Prema tome, javlja se potreba da klasificiramo krive u dvije kategorije: one koje imaju dužinu i one koje nemaju. Prve zovemo rektifikacione krive, dok one krive koje nemaju dužinu zovemo nerektifikacione.

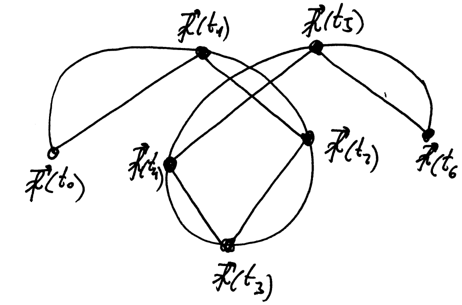
Sljedeće što želimo je formalno opisati ove ideje.

Neka je
$$\vec{r}: [a,b] \to R^3$$
$$t \to (x(t), y(t), z(t))$$
data kriva u prostoru. Za svaku podjelu intervala $[a,b]$ datu sa

$$P=\{t_0, t_1, \dots, t_m\}, \quad a=t_0<t_1<\dots<t_m=b$$

tačke $\vec{r}(t_0), \vec{r}(t_1), \dots, \vec{r}(t_m)$ predstavljaju vrhove upisane poligonalne linije.





Dužinu ove poligonalne linije ćemo označavati sa $duž_{\vec{r}}(P)$ i definisati kao sumu

$$duž_{\vec{r}}(P) = \sum_{k=1}^{m} |\vec{r}(t_k) - \vec{r}(t_{k-1})|$$

Definicija: Ako je skup brojeva $duž_{\vec{r}}(P)$ za svaku podjelu P intervala $[a,b]$, tada za krivu $\vec{r}$ kažemo da je REKTIFIKTABILNA na $[a,b]$ i njezina dužina luka, koju ćemo označavati sa s, definišemo sa

$$s = \sup\{ duž_{\vec{r}}(P) : P \in \mathcal{P}[a,b] \},$$

gdje je $\mathcal{P}[a,b]$ skup svih mogućih podjela intervala $[a,b]$. Ako skup brojeva $duž_{\vec{r}}(P)$ nije ograničena, za $\vec{r}$ kažemo da je NEREKTIFIKTABILNA.

$\boxed{\text{rektifiktabilna – sinonimi: ispravljiva, konačna}}$

Koristeći isključivo definiciju, ispitati da li kriva $\vec{x} = t\vec{e_1} + t^2\vec{e_2}$ na intervalu $[0,1]$ ima dužinu, ako su $|\vec{e_1}|=|\vec{e_2}|=1$ i $\vec{e_1}\perp\vec{e_2}$.

Rj. Napravimo podjelu P intervala $[0,1]$

$$P=\{\underset{\underset{0}{\|}}{t_0},t_1,t_2,\dots,\underset{\underset{1}{\|}}{t_n}\}$$

$$0=t_0<t_1<t_2<\dots<t_n=1$$

dužinu poligonalne linije krive $\vec{x}$ za podjelu P računamo

$$\text{duž}_{\vec{x}}(P)=\sum_{i=0}^{n-1}|\vec{x}(t_i)-\vec{x}(t_{i+1})|=$$

$$=\sum_{i=0}^{n-1}\left|(t_i\vec{e_1}+t_i^2\vec{e_2})-(t_{i+1}\vec{e_1}+t_{i+1}^2\vec{e_2})\right|=$$

$$=\sum_{i=0}^{n-1}\left|(t_i-t_{i+1})\vec{e_1}+(t_i^2-t_{i+1}^2)\vec{e_2}\right|=$$

$$\leq\sum_{i=0}^{n-1}|t_i-t_{i+1}|\underbrace{|\vec{e_1}|}_{=1}+|t_i^2-t_{i+1}^2|\underbrace{|\vec{e_2}|}_{=1}=\left|\ 0=t_0<t_1<\dots<t_n=1\ \right|$$

$$=\sum_{i=0}^{n-1}\left[(t_{i+1}-t_i)+(t_{i+1}^2-t_i^2)\right]$$

$$=\sum_{i=0}^{n-1}(t_{i+1}-t_i)\left[1+\underbrace{t_{i+1}}_{\leq1}+\underbrace{t_i}_{\leq1}\right]\leq3\sum_{i=0}^{n-1}(t_{i+1}-t_i)=3$$

Dužina poligonalne linije krive $\vec{x}$ za proizvoljnu podjelu P je ograničena odozgo sa 3, što znači da $\exists\ \sup\{\text{duž}_{\vec{x}}(P): P\in\mathcal{P}[a,b]\}$.

Napisati parametarski oblik jednačine krive

$$4ax=(y+z)^2;\ 4x^2+3y^2=3z^2$$

i naći dužinu krive od tačke $O(0,0,0)$ do proizvoljne tačke krive.

Rj.

$$C:\begin{cases}4ax=(y+z)^2\\4x^2+3y^2=3z^2\end{cases}$$

Krive u ravni se mogu parametrizirati pomoću familija krugova, familija pravih, familije parabola, bilo koje familije krivih koje imaju "jednostavni" oblik

Jednačina $4ax=(y+z)^2$ sugeriše smjenu $x=at^2$.

$$4a\cdot at^2=(y+z)^2$$

$$4a^2t^2=(y+z)^2\Rightarrow y+z=2at$$

Dok se iz druge jednačine $4x^2+3y^2=3z^2$ dobija

$$4x^2=3(z^2-y^2)$$

$$4a^2t^4=3(z-y)(z+y)\xRightarrow{y+z=2at}3(z-y)2at=4a^2t^4\ /:2at\cdot3\ (t\neq0)$$

$$z-y=\frac{2}{3}at^3$$

$$\begin{array}{l}y+z=2at\\y-z=-\frac{2}{3}at^3\\\hline 2y=2at(1-\frac{1}{3}t^2)\end{array}\qquad\begin{array}{l}y=at(1-\frac{1}{3}t^2)\\y=a(t-\frac{1}{3}t^3)\end{array}\qquad\begin{array}{l}y+z=2at\\+\ z-y=\frac{2}{3}at^3\\\hline 2z=2a(t+\frac{1}{3}t^3)\end{array}$$

Prema tome

$$C:\begin{cases}x=at^2\\y=a(t-\frac{1}{3}t^3)\\z=a(t+\frac{1}{3}t^3)\\-\infty<t<+\infty\end{cases}$$

Ako je kriva data u parametarskom obliku $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$ tada je dužina luka krive od tačke sa parametrom t_0 do tačke sa parametrom t_1 data formulom:

$$s=\int_{t_0}^{t_1} ds = \int_{t_0}^{t_1}\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}\,dt$$

krivolinijski integral prve vrste

$\dot{x}=2at$, $\dot{y}=a(1-t^2)$, $\dot{z}=a(1+t^2)$

Pronađimo dužinu luka od tačke $O(0,0,0)$ do proizvoljne tačke recimo $A(a\lambda^2; a(\lambda+\frac{1}{3}\lambda^3); a(\lambda-\frac{1}{3}\lambda^3))$, $\lambda\in\mathbb{R}$.

$$s=\int_0^\lambda\sqrt{4a^2t^2+a^2(1-t^2)^2+a^2(1+t^2)^2}\,dt=\int_0^\lambda\sqrt{4a^2t^2+a^2(1\underline{-2t^2}+t^4+1\underline{+2t^2}+t^4)}\,dt$$

$$=a\int_0^\lambda\sqrt{4t^2+2+2t^4}\,dt=a\sqrt{2}\int_0^\lambda\sqrt{\underbrace{t^4+2t^2+1}_{(t^2+1)^2}}\,dt=a\sqrt{2}\int_0^\lambda(t^2+1)\,dt$$

$$=a\sqrt{2}\left(\frac{1}{3}t^3\Big|_0^\lambda+t\Big|_0^\lambda\right)=a\sqrt{2}\left(\frac{1}{3}\lambda^3+\lambda\right)\Rightarrow s=a\sqrt{2}\left(\frac{1}{3}\lambda^3+\lambda\right)$$

Dužina luka od tačke O do tačke A je $\sqrt{2}y$ gdje je y koordinata tačke A.

Izračunati dužinu luka s krive $\vec{r}=e^t(\cos t, \sin t, 0)$, od tačke 0 do tačke t. Poslije toga iz formule za dužinu luka s, parametar t izraziti preko s.

Rj. Dužina luka krive od tačke 0 do λ se računa po formuli

$$s=\int_0^\lambda \underset{\text{malo } s}{ds} = \int_0^\lambda\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}\,dt$$ (ako je kriva data u parametarskom obliku)

U našem slučaju $\dot{x}=(e^t\cos t)'=e^t\cos t-e^t\sin t=e^t(\cos t-\sin t)$

$\dot{y}=(e^t\sin t)'=e^t\sin t+e^t\cos t=e^t(\sin t+\cos t)$

$\dot{z}=0$

$$\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}=e^t\sqrt{\underline{\cos^2 t}\cancel{-2\sin t\cos t}+\underline{\sin^2 t}+\sin^2 t\cancel{+2\sin t\cos t}+\cos^2 t}=$$

$$=e^t\sqrt{2}$$

$$s=\int_0^\lambda ds=\int_0^\lambda e^t\sqrt{2}\,dt=\sqrt{2}\,e^t\Big|_0^\lambda=\sqrt{2}(e^\lambda-1)$$

$$s=\int_0^t ds=\sqrt{2}(e^t-1)$$

Dužina luka od 0 do t je $s=\sqrt{2}(e^t-1)$.

$$e^t-1=\frac{1}{\sqrt{2}}s$$

$$e^t=\frac{s}{\sqrt{2}}+1$$

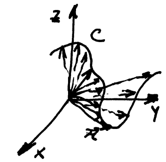
$$t=\ln\left(1+\frac{s}{\sqrt{2}}\right)$$ parametar t izražen preko dužine luka s.

Do sada smo neku krivu $\vec{r}$ obično parametrizivali pomoću parametra t. Parametrizaciju možemo uraditi i pomoću dužine luka krive od neke tačke sa parametrom 0 do tačke sa parametrom λ (lambda). Ovakvu parametrizaciju zovemo prirodna parametrizacija

\# Napisati jednačinu krive $\vec{r}=(a\cos t, a\sin t, bt)$ izrazivši $\vec{r}$ kao funkciju argumenta luk s. Diferenciranjem po luku s naći jedinične vektore tangente u proizvoljnoj tački.

Rj.

$C: \vec{r}=(a\cos t; a\sin t; bt)$



$$\boxed{s=\int_{t_0}^{t_1} ds=\int_{t_0}^{t_1}\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}\,dt}$$

krivol. integral prve vrste

dužina luka krive $c: \begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t) \\ t_0\le t\le t_1 \end{cases}$ od tačke t_0 do t_1

Kako je $ds=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}$ tj. u našem slučaju

$$\dot{x}=-a\sin t$$
$$\dot{y}=a\cos t$$
$$\dot{z}=b$$

$$ds=\sqrt{a^2\sin^2 t+a^2\cos^2 t+b^2}=\sqrt{a^2+b^2}$$

$$s=\int_0^{\lambda} ds=\sqrt{a^2+b^2}\int_0^{\lambda} dt$$

uzmimo dužinu luka od 0 do neko $\lambda\in\mathbb{R}$

$$s=\sqrt{a^2+b^2}\,t\Big|_0^{\lambda} \xRightarrow[\text{za } \lambda=t]{\text{za to možemo uzeti 0}} \lambda=\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}=t$$

ako umjesto λ stavimo param. t

$$\vec{r}=\left(a\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, a\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{bs}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

$\vec{r}$ kao f-ja čiji je argument luk s

$\boxed{\vec{t}=\frac{d\vec{r}}{ds} \text{ vektor tangente}}$

$$\vec{t}=\left(a\left(-\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}; a\left(\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}; \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

$$\vec{t}=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\left(-a\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}; a\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}; b\right)$$

ako računamo $|\vec{t}|$ primjetićemo da smo dobili $|\vec{t}|=1$.

Data je kriva $C: \vec{r}=(a\cos t,\ a\sin t,\ a\ln\cos t)$.
Napisati jednačinu te krive uvodeći kao argument luk s.

Rj. Dužina luka krive od tačke sa parametrom 0 do tačke sa parametrom λ data je formulom

$$s=\int_0^\lambda ds \quad \leftarrow \text{krivolinijski integral prve vrste}$$

$$\dot{x}=-a\sin t$$
$$\dot{y}=a\cos t$$
$$\dot{z}=\frac{a}{\cos t}\cdot(-\sin t)$$

$$ds=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}=\sqrt{a^2\sin^2 t+a^2\cos^2 t+a^2\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}}$$

$$ds=a\sqrt{1+\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}}=\frac{a}{\cos t}$$

$$s=\int_0^\lambda \frac{a}{\cos t}\,dt=a\int_0^\lambda \frac{dt}{\cos t}=\left|\begin{array}{l}\text{želimo izraz } \frac{1}{\cos t} \text{ napisati}\\ \text{kao zbir dva razlomka}\end{array}\right|$$

$$=a\int_0^\lambda \frac{1+\sin x}{(1+\sin x)\cos x}\,dx=a\int_0^\lambda \frac{\sin^2 x+\cos^2 x+\sin x}{(1+\sin x)\cos x}\,dx$$

$$=a\int_0^\lambda \frac{\cos^2 x+\sin x(1+\sin x)}{(1+\sin x)\cos x}\,dx=a\int_0^\lambda\left(\frac{\cos x}{1+\sin x}+\frac{\sin x}{\cos x}\right)dx$$

$$=a\int_0^\lambda \frac{d(1+\sin x)}{1+\sin x}+a\int_0^\lambda\frac{-d(\cos x)}{\cos x}=\left(a\ln|1+\sin x|-a\ln\cos x\right)\Big|_0^\lambda$$

$$=a\ln\left|\frac{1+\sin x}{\cos x}\right|\Big|_0^\lambda=a\ln\left|\frac{1+\sin\lambda}{\cos\lambda}\right|$$

Dobili smo $s=a\ln\left|\frac{1+\sin t}{\cos t}\right|$ (ako umjesto parametra λ stavimo parametar t)

$$\frac{s}{a}=\ln\frac{1+\sin t}{\cos t}$$

$$e^{\frac{s}{a}}=\frac{1+\sin t}{\cos t}$$

$$\operatorname{ch}\frac{s}{a}=\frac{e^{\frac{s}{a}}+e^{-\frac{s}{a}}}{2}$$

U našem slučaju

$$e^{\frac{s}{a}}+e^{-\frac{s}{a}}=\frac{1+\sin t}{\cos t}+\frac{\cos t}{1+\sin t}=\frac{\overbrace{(1+\sin t)^2}^{1+2\sin t+\sin^2 t}+\cos^2 t}{\cos t(1+\sin t)}$$

$$\frac{e^{\frac{s}{a}}+e^{-\frac{s}{a}}}{2}=\frac{2(1+\sin t)}{2\cos t(1+\sin t)}=\frac{1}{\cos t}$$

Prema tome $\cos t=\dfrac{1}{\frac{e^{\frac{s}{a}}+e^{-\frac{s}{a}}}{2}}=\dfrac{1}{\operatorname{ch}\frac{s}{a}} \Rightarrow a\cos t=\dfrac{a}{\operatorname{ch}\frac{s}{a}}$

U drugoj koordinati imamo izraz $a\sin t$

$$e^{\frac{s}{a}}=\frac{1+\sin t}{\cos t} \Rightarrow 1+\sin t=\frac{e^{\frac{s}{a}}}{\operatorname{ch}\frac{s}{a}}$$

$$\sin t=\frac{e^{\frac{s}{a}}}{\operatorname{ch}\frac{s}{a}}-1$$

Prema tome parametrizacija krive pomoću luka s izgleda

$$\vec{r}=\left(\frac{a}{\operatorname{ch}\frac{s}{a}},\ a\left(\frac{e^{\frac{s}{a}}}{\operatorname{ch}\frac{s}{a}}-1\right),\ a\ln\frac{1}{\operatorname{ch}\frac{s}{a}}\right)$$

$$\vec{r}=a\left(\frac{1}{\operatorname{ch}\frac{s}{a}},\ \frac{e^{\frac{s}{a}}}{\operatorname{ch}\frac{s}{a}}-1,\ \ln\frac{1}{\operatorname{ch}\frac{s}{a}}\right)$$

traženo rješenje

Ravan $z=0$ napisati u parametarskom obliku.

Poslije toga istu ravan napisati u obliku

$\{\vec{a}\lambda+\vec{b}\mu+\vec{c} \mid \lambda,\mu\in\mathbb{R},\ \vec{a},\vec{b},\vec{c}$ neki konstantni vektori$\}$.

R.j.

$$\mathbb{R}^3=\{(x,y,z) \mid x,y,z\in\mathbb{R}\}=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \mid x,y,z\in\mathbb{R}\right\}$$

parametarski oblik prostora

U prostoru imamo tri promjenjive.
Ravan će imati dvije promjenjive.
Kriva ima samo jednu promjenjivu

$z=0$ je $\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\0\end{pmatrix} \mid x,y\in\mathbb{R}\right\}$ tj. $\begin{cases}x=\lambda\\ y=\mu\\ z=0\\ \lambda,\mu\in\mathbb{R}\end{cases}$

Kako je $\begin{pmatrix}\lambda\\\mu\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\lambda+\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\mu$ to je

$z=0$ u stvari $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\lambda+\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\mu \mid \lambda,\mu\in\mathbb{R}\right\}$

$\vec{a}=(1,0,0)$, $\vec{b}=(0,1,0)$, $\vec{c}=(0,0,0)$.

Ravan $x+y=0$ napisati u parametarskom obliku.

Poslije toga istu ravan napisati u obliku

$\{\vec{a}\lambda+\vec{b}\mu+\vec{c} \mid \lambda,\mu\in\mathbb{R},\ \vec{a},\vec{b},\vec{c}$ konstantni vektori$\}$

R.j.

$$\mathbb{R}^3=\{(x,y,z) \mid x,y,z\in\mathbb{R}\}=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \mid x,y,z\in\mathbb{R}\right\}$$

parametarski oblik prostora

Ravan će imati dvije promjenjive.

$x+y=0$
$y=-x$ je $\left\{\begin{pmatrix}x\\-x\\z\end{pmatrix} \mid x,z\in\mathbb{R}\right\}$ tj. $\begin{cases}x=\lambda\\ y=-\lambda\\ z=\mu\\ \lambda,\mu\in\mathbb{R}\end{cases}$

Kako je $\begin{pmatrix}\lambda\\-\lambda\\\mu\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda\\-\lambda\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\\mu\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\lambda+\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\mu$ to je

$x+y=0$ u stvari $\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\lambda+\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\mu \mid \lambda,\mu\in\mathbb{R}\right\}$

$\vec{a}=(1,-1,0)$, $\vec{b}=(0,0,1)$, $\vec{c}=(0,0,0)$.

(#) Posmatrajmo krivu c datu implicitno sa

$$\vec{r}: \begin{cases} \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1 \\ a\sqrt{b^2-c^2}\, z = c\sqrt{a^2-b^2}\, x \end{cases} \qquad a>b>c.$$

Izračunati njenu dužinu luka i naći te reparametrizaciju dužinom luka.

Rj. -upute

Da bi smo izračunali dužinu luka potrebno je krivu $\vec{r}$ napisati u parametarskom obliku. Napišimo prvo ravan $a\sqrt{b^2-c^2}\, z = c\sqrt{a^2-b^2}\, x$ u parametarskom obliku.

$$a\sqrt{b^2-c^2}\, z = c\sqrt{a^2-b^2}\, x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z = \frac{c\sqrt{a^2-b^2}}{a\sqrt{b^2-c^2}}\, x$$

Ako za x uzmemo $x = \frac{a\sqrt{b^2-c^2}}{b\sqrt{a^2-c^2}}\lambda$ imamo $z = \frac{c\sqrt{a^2-b^2}}{b\sqrt{a^2-c^2}}\lambda$

pa je $\left\{ \begin{pmatrix} \frac{a\sqrt{b^2-c^2}}{b\sqrt{a^2-c^2}}\lambda \\ \mu \\ \frac{c\sqrt{a^2-b^2}}{b\sqrt{a^2-c^2}}\lambda \end{pmatrix} \middle| \lambda, \mu \right\}$ parametarski oblik ravni $a\sqrt{b^2-c^2}\, z = c\sqrt{a^2-b^2}\, x$.

Stavljajući ovo u jednačinu elipsoida dobijamo

$$\lambda^2 + \mu^2 = b^2$$ tj. jednačinu kruga

radijusa b. Parametrizacija kruga je data sa

$$\begin{cases} \lambda(t) = b\cos t \\ \mu(t) = b\sin t \\ 0 \le t < 2\pi \end{cases}$$

Pa je parametarski oblik krive $\vec{r}$ dat sa

$$\vec{r}(t): \begin{cases} \frac{a\sqrt{b^2-c^2}}{\sqrt{a^2-c^2}}\cos t \\ b\sin t \\ \frac{c\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{a^2-c^2}}\cos t \end{cases} \quad 0 \le t \le 2\pi$$

$|\vec{r}'(t)|^2 = b^2$, $s = \int_0^s dt = ts$ (mjereno od $s=0$) tako da je reparametrizacija dužinom luka kruga data sa

$$\vec{r}(s) = \left(\frac{a\sqrt{b^2-c^2}}{\sqrt{a^2-c^2}}\cos\frac{s}{b},\ b\sin\frac{s}{b},\ \frac{c\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{a^2-c^2}}\cos\frac{s}{b} \right)$$

Izabrani zadaci za vježbu (iz lekcija "Krive u prostoru" i "Dužina luka krive i prirodna parametrizacija krive")

Derivacija. Oznake za derivaciju

Reparametriziranu funkciju deriviramo ovako:

$$(\vec{r}[t(s)])' = \frac{d\vec{r}}{ds} = \frac{d\vec{r}}{dt}\cdot\frac{dt}{ds} = \vec{r}_t' \cdot t_s'.$$

Derivacija vektorske funkcije realne varijable po invarijantnom (prirodnom) parametru označava se crticom, dakle:

$$\vec{r}\,' = \frac{d\vec{r}}{ds},$$

a po općem parametru točkicom, dakle:

$$\dot{\vec{r}} = \frac{d\vec{r}}{dt}.$$

Graf krivulje (odnosno krivulja) ponekad se zadaje kao presjek dviju ploha:

$$F(x, y, z) = 0, \qquad G(x, y, z) = 0.$$

Zadaci:

52. a) Krivulja $\alpha : \mathbf{R} \to E^3$ zadana je svojom vektorskom jednadžbom:

$$\vec{r} = u\vec{i} + u^2\vec{j}.$$

Skicirajte graf te krivulje.

b) Krivulja $\alpha : \mathbf{R} \to E^3$ zadana je sa:

$$\vec{r} = t\vec{i} + t\vec{j}.$$

Skicirajte graf te krivulje.

c) Zatvorena krivulja $\alpha : [0,2\pi] \to E^3$ zadana je svojom vektorskom jednadžbom:

$$\vec{r}(t) = a\cos t\,\vec{i} + b\sin t\,\vec{j}, \quad t \in [0,2\pi], \quad a>0, \quad b>0.$$

Skicirajte graf te krivulje.

Definicija: Diferencijabilno preslikavanje $\alpha : [a, b] \to E^3$ za koje je $\alpha(a) = \alpha(b)$ zovemo *zatvorenom krivuljom.*

a) Usporedimo li zadanu jednadžbu s

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

izlazi da je $x = u, y = u^2$, $z = 0$, pa eliminiravši parametar u dobijamo $y = x^2$, $z = 0$. Krivulja je parabola.

b) Analognom usporedbom izlazi:

$$x = t, \ y = t, \ z = 0.$$

Krivulja je pravac $y = x, \ z = 0$.

c) Imamo:

$$x = a\cos t, \quad y = b\sin t, \quad z = 0.$$

Eliminacijom parametra t izlazi:

$$\frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad z = 0.$$

Krivulja je, dakle, elipsa.

53. a) Točke grafa neke krivulje u XOY ravnini zadane su sa $y = f(x)$, $x \in \mathbf{R}$. Kako glasi vektorska i parametarska jednadžba te krivulje?

b) U ravnini XOY zadana je elipsa:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Napišite vektorsku i parametarske jednadžbe te krivulje.

a) Krivulju u ravnini XOY zadanu funkcijom $y = f(x)$, $x \in \mathbf{R}$ zadajemo parametarskim jednadžbama ovako:

$$x = t, \quad y = f(t), \quad z = 0, \quad t \in \mathbf{R},$$

a vektorska jednadžba glasi:

$$\vec{r}(t) = t\vec{i} + f(t)\vec{j}.$$

b) Parametarske jednadžbe elipse glase ovako:

$$x = a\cos t, \quad y = b\sin t, \quad z = 0, \quad t \in [0,2\pi], \quad a > 0, \quad b > 0,$$

a vektorska jednadžba:

$$\vec{r}(t) = a\cos t\,\vec{i} + b\sin t\,\vec{j}, \quad t \in [0,2\pi], \quad a>0, \quad b>0.$$

Vektorsku jednadžbu krivulje, ovdje elipse, ponekad pišemo i ovako:

$$\vec{r}(t) = \{a\cos t,\ b\sin t,\ 0\}.$$

54. Kružna zavojnica (ili obična cilindrična spirala) je preslikavanje

$$\alpha : \mathbf{R} \to E^3$$

zadano sa:

$$\vec{r}(t) = a\cos t\,\vec{i} + a\sin t\,\vec{j} + bt\vec{k}, \quad t \in \mathbf{R}, \quad a>0, \quad b>0.$$

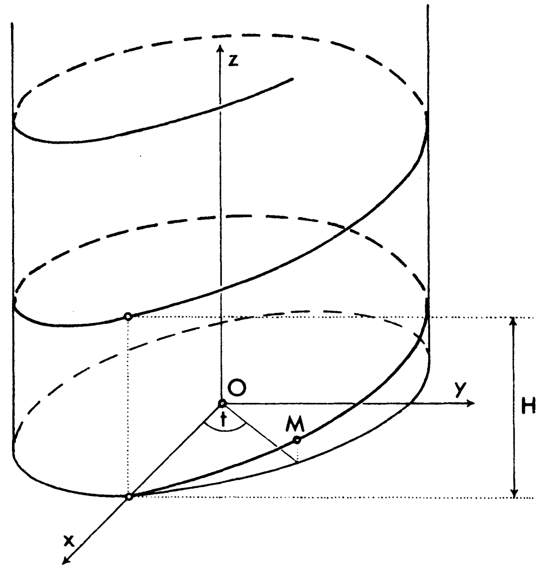
Skicirajte graf te krivulje (sl. 13).

Eliminiramo li iz parametarskih jednadžbi kružne zavojnice: $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$, parametar t, vidimo da ona leži na cilindru $x^2 + y^2 = a^2$ radiusa a i kojemu je os os OZ. $z = bt$ kazuje da je »brzina« b dizanja bilo koje točke kružne zavojnice od baze valjka konstantna. Udaljenost z od baze pri obilaženju valjka raste proporcionalno središnjem kutu osnovnog kruga.

Veličina $H = 2\pi\,|b|$ zove se *hod* kružne zavojnice.

Krivulja ima još naziv *heliks*.

(Vidi zad. 58, 62, 97, 99, 118, 151, 163, 197).



Sl. 13.

55. Zadana je Vivijanieva krivulja:

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \qquad x^2 + y^2 = ax.$$

Napisati vektorsku i parametarske jednadžbe te krivulje.
Vivijanieva krivulja je presjek sfere i cilindra:

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \qquad \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{a^2}{4}.$$

Neka je parametar t kao na slici 14, tj. $\sphericalangle\, OTT'$.

Imamo nadalje: $\overline{OT} = \overline{OA} = a$,
a kako su trokuti OAT' i OTT' sukladni (stranica OT' im je zajednička), to je $\sphericalangle\, OAT'$ jednak parametru t. Tada je

$OT' = a \sin t$, pa je:
$x = OT' \cos(90° - t) = a \sin^2 t,$
$y = OT' \sin(90° - t) = a \sin T \cos t,$
$z = a \cos t.$

Krivulja, dakle, ima parametarske jednadžbe:

$x = a \sin^2 t,$
$y = a \sin t \cos t,$
$z = a \cos t,$ gdje je $t \in [0, 2\pi]$, $[0, 2\pi] \rightarrow E^3$,

odnosno vektorsku jednadžbu:

$$\vec{r} = a \sin^2 t\, \vec{i} + a \sin t \cos t\, \vec{j} + a \cos t\, \vec{k}, \qquad t \in [0, 2\pi],$$

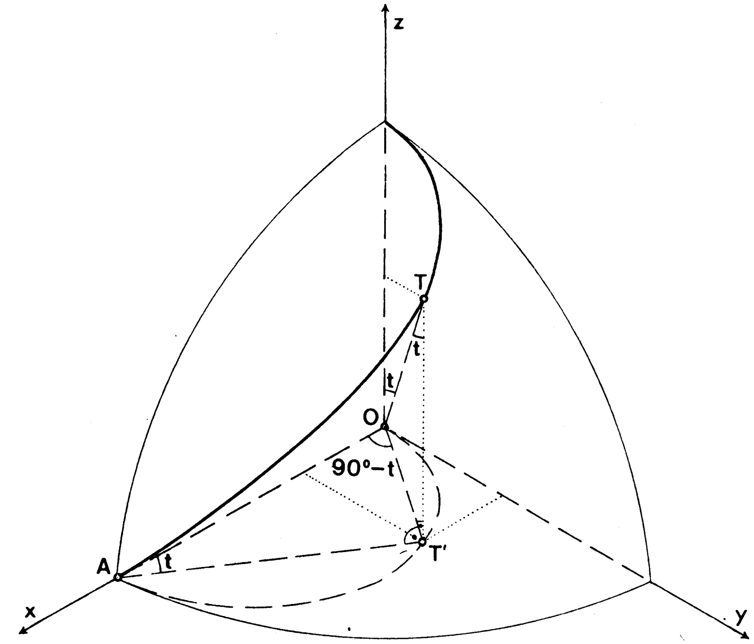
ili kraće:

$$\vec{r} = \{a \sin^2 t, a \sin t \cos t, a \cos t\}, \qquad t \in [0, 2\pi].$$

Provjerite sami da je:

$$\vec{r} = \left\{\frac{a}{2}(1 + \cos t), \quad \frac{a}{2}\sin t, \quad a \sin\frac{t}{2}\right\}, \qquad t \in [0, 4\pi],$$

također jedna parametrizacija Vivijanieve krivulje.



Sl. 14.

56. Dokazati da graf zatvorene krivulje $\alpha : [0, \pi] \rightarrow E^3$ zadane sa:

$$x = \sin 2\phi, \qquad y = 1 - \cos 2\phi, \qquad z = 2\cos\phi$$

leži na sferi i jest presjek paraboličkog i kružnog valjka. Napisati vektorsku jednadžbu krivulje.

Vektorska jednadžba krivulje glasi:

$$\vec{r} = \{\sin 2\phi, \quad 1 - \cos 2\phi, \quad 2\cos\phi\}.$$

Dokažimo da krivulja leži na sferi. Imamo:

$$x^2 + y^2 + z^2 = \sin^2 2\phi + (1 - \cos 2\phi)^2 + 4\cos^2\phi =$$
$$= 2 - 2\cos 2\phi + 4\cos^2\phi = 2 + 2\cos^2\phi + 2\sin^2\phi = 4.$$

Krivulja, dakle, leži na sferi $x^2 + y^2 + z^2 = 4$. Da bismo krivulju napisali kao presjek dvaju valjaka, treba eliminirati parametar ϕ.

Iz prve dvije jednadžbe imamo:

$$x^2 + (y-1)^2 = \sin^2 2\phi + \cos^2 2\phi = 1.$$

Iz druge dvije jednadžbe imamo:

$$y = 2\sin^2\phi, \quad z = 2\cos\phi, \quad \text{pa je}$$

$$\frac{y}{2} + \left(\frac{z}{2}\right)^2 = \sin^2\phi + \cos^2\phi = 1.$$

Krivulja je, dakle, presjek kružnog:

$x^2 + (y-1)^2 = 1$ i paraboličkog valjka:

$$\frac{y}{2} + \left(\frac{z}{2}\right)^2 = 1.$$

57. Zadana je krivulja $\alpha : \mathbf{R} \to E^3$ sa:

$$x = e^t \cos t, \quad y = e^t \sin t, \quad z = 2t.$$

1°. Naći projekciju grafa krivulje na ravninu XOY.

2°. Napisati jednadžbu krivulje kao presjek dviju ploha.

1°. Parametarska jednadžba projekcije te krivulje na ravninu XOY glasi:

$$x = e^t \cos t, \quad y = e^t \sin t.$$

Eliminirajmo parametar t (odnosno pokušajmo eliminirati):

$$x^2 + y^2 = e^{2t}.$$

U polarnom sustavu ova jednadžba glasi:

$$r = e^t,$$

gdje t ima značenje polarnog kuta.

Projekcija zadane krivulje je logaritamska spirala.

2°. Treba eliminirati parametar t.

Iz prve dvije jednadžbe imamo:

$$x^2 + y^2 = e^{2t}, \quad \frac{y}{x} = \operatorname{tg} t,$$

a iz treće jednadžbe: $t = \dfrac{z}{2}$.

Zadana krivulja je prema tome presjek ovih dviju ploha:

$$x^2 + y^2 = e^z$$

$$y = x \operatorname{tg} \frac{z}{2}.$$

Iz ovog oblika također možemo naći jednadžbu projekcije krivulje na ravninu XOY iz 1°.

Eliminirajmo z iz navedene dvije jednadžbe.

Iz prve imamo:

$$z = \ln(x^2 + y^2).$$

Uvrstimo li ovo u drugu jednadžbu imamo:

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg} \ln\sqrt{x^2 + y^2},$$

odnosno:

$$\ln\sqrt{x^2 + y^2} = \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x},$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = e^{\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}}.$$

U polarnom sustavu jednadžba ove projekcije glasi:

$$r = e^t,$$

kao na prvi način u 1°.

58. Zadana je krivulja (spirala) $\alpha : \mathbf{R} \to E^3$ sa:

$$x = a\cos t \quad y = a\sin t \quad z = bt, \quad a > 0, \quad b > 0.$$

1°. Naći projekcije grafa krivulje na koordinatne ravnine.

2°. Napisati jednadžbu krivulje kao presjek dviju ploha.

1°. Projekcija na koordinatnu ravninu XOY ima parametarsku jednadžbu:

$$x = a\cos t$$

$$y = a\sin t,$$

a eliminiravši parametar t implicitni oblik jednadžbe projekcije glasi:

$$x^2 + y^2 = a^2.$$

Projekcija na koordinatnu ravninu YOZ ima jednadžbu:

$$y = a\sin t$$

$$z = bt,$$

odnosno:

$$y = a\sin\frac{z}{b}.$$

Projekcija na koordinatnu ravninu XOZ ima jednadžbu:

$$x = a\cos t$$

$$z = bt,$$

odnosno:

$$x = a\cos\frac{z}{b}.$$

2°. Eliminirajmo parametar t:

$$x^2+y^2=a^2, \qquad y=x\,\mathrm{tg}\,t, \qquad t=\frac{z}{b}.$$

Jednadžba krivulje prema tome glasi:

$$x^2+y^2=a^2$$

$$z=b\,\mathrm{arc\,tg}\frac{y}{x}.$$

Iz ovog oblika možemo naći također projekciju grafa krivulje na koordinatne ravnine XOY, YOZ, XOZ tako da iz navedene dvije jednadžbe eliminiramo redom z, pa x, pa y.

Eliminirajmo z:

Projekcija na ravninu XOY ima jednadžbu:

$$x^2+y^2=a^2.$$

Eliminirajmo x:

Iz druge jednadžbe je: $x=y\,\mathrm{ctg}\frac{z}{b}$, što uvršteno u prvu jednadžbu daje traženu projekciju na ravninu YOZ:

$$y^2\left(\mathrm{ctg}^2\frac{z}{b}+1\right)=a^2,$$

$$y^2=a^2\sin^2\frac{z}{b},$$

$$y=a\sin\frac{z}{b}.$$

Na kraju eliminirajmo y. U prvu jednadžbu uvrstimo $y=x\,\mathrm{tg}\frac{z}{b}$:

$$x^2\left(\mathrm{tg}^2\frac{z}{b}+1\right)=a^2,$$

$$x^2=a^2\cos^2\frac{z}{b},$$

$$x=a\cos\frac{z}{b},$$

što predstavlja jednadžbu projekcije zadane krivulje na ravninu XOZ.

59. Naći duljinu luka krivulje $\alpha:\left[\cdot\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\to E^3$:

$\vec{r}=\{\sin^2 t, \sin t\cos t, \ln\cos t\}$

od $t=0$ do $t=t$. (Ovo znači: od točke u kojoj je $t=0$ do točke u kojoj je $t=t$. Analogno u daljnjim zadacima). Imamo:

$$\dot{x}=2\sin t\cos t=\sin 2t,$$

$$\dot{y}=\cos^2 t-\sin^2 t=\cos 2t, \qquad \dot{z}=-\frac{\sin t}{\cos t}=-\mathrm{tg}\,t.$$

Tada je:

$$\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2=\sin^2 2t+\cos^2 2t+\mathrm{tg}^2 t=1+\mathrm{tg}^2 t=\frac{1}{\cos^2 t}.$$

Duljina luka jest:

$$s=\int_0^t \frac{1}{\cos t}\,\mathrm{d}t=\ln\mathrm{tg}\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\Bigg|_0^t.$$

$$s=\ln\mathrm{tg}\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4}\right).$$

60. Naći duljinu luka krivulje:

$$x^2=3y,\ 2xy=9z \text{ od točke } (0,0,0) \text{ do točke } (3,3,2).$$

Ovdje je krivulja zadana kao presjek dviju ploha. Pređimo na parametarski oblik pa uzmimo:

$$x=3t,$$

onda je $y=3t^2$, $z=2t^3$,

tako da je taj presjek graf krivulje $\alpha:\mathbf{R}\to E^3$ koja je zadana sa:

$$\vec{r}=\{3t,\ 3t^2,\ 2t^3\}.$$

Nadalje je:

$$\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2=9+36t^2+36t^4=9(1+4t^2+4t^4)=9(1+2t^2)^2.$$

Tada je duljina luka:

$$s=3\int_0^1 (1+2t^2)\,\mathrm{d}t=3\left(t+\frac{2}{3}t^3\right)\Bigg|_0^1=3\left(1+\frac{2}{3}\right)=3\cdot\frac{5}{3}=5.$$

61. Odrediti duljinu luka krivulje $\alpha:\mathbf{R}\to E^3$:

$\vec{r}(t)=t\vec{a}+(1-t)\vec{b}$ od $t_0=0$ do t, gdje su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ konstantni vektori.

Duljina luka glasi:

$$s=\int_{t_0}^t |\dot{\vec{r}}(t)|\,\mathrm{d}t.$$

Tada je zbog konstantnosti $\vec{a}$ i $\vec{b}$:

$$|\dot{\vec{r}}(t)|=\sqrt{(\dot{\vec{r}})^2}=\sqrt{(\vec{a}-\vec{b})^2}=|\vec{a}-\vec{b}|,$$

pa imamo:

$$s=\int_0^t |\vec{a}-\vec{b}|\,\mathrm{d}t=|\vec{a}-\vec{b}|\int_0^t \mathrm{d}t=|\vec{a}-\vec{b}|\,t.$$

62. Običnu cilindričnu spiralu $\alpha : \mathbf{R} \to E^3$ zadanu s:

$$\vec{r}(t) = \{a\cos t, a\sin t, bt\}, \qquad a, b > 0$$

parametrizirati duljinom luka.

Imamo:

$$\dot{\vec{r}}(t) = \{-a\sin t, a\cos t, b\},$$
$$|\dot{\vec{r}}|^2 = a^2 + b^2.$$

Tada je, jer je u točki $x = a$ $t = 0$:

$$s(t) = \int_0^t |\dot{\vec{r}}|\,\mathrm{d}t = \int_0^t \sqrt{a^2+b^2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{a^2+b^2}\int_0^t \mathrm{d}t.$$

Dakle:

$$s(t) = \sqrt{a^2+b^2}\quad t.$$

Inverzna funkcija jest:

$$t = t(s) = \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

pa cilindrična spirala ima jednadžbu:

$$\vec{r} = \vec{r}(s) = \left\{a\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, a\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{bs}{\sqrt{a^2+b^2}}\right\}.$$

(Vidi zad. 54, 58, 99, 101, 164, 194.)

63. Naći projekciju na ravninu XOY grafa krivulje koja nastaje kao presjek hiperboličkog parabolida $z = x^2 - y^2$ i ravnine $x + y - z - 1 = 0$.

64. Naći projekciju na ravninu YOZ grafa krivulje koja nastaje kao presjek rotacionog paraboloida $x = y^2 + z^2$ i ravnine $x - 2y + 4z - 4 = 0$.

65. Dokazati da projekcija na ravninu XOY grafa krivulje koja je presjek eliptičkog paraboloida $z = x^2 + 2y^2$ i ravnine $2x - 4y + z - 1 = 0$ jest elipsa. Naći veliku i malu os te elipse.

66. Naći projekciju na ravninu XOZ grafa krivulja koja je presjek stošca $y^2 = xz$ i ravnine $x - y + z + 1 = 0$.

67. Pokazati da

$$x = a\sin\theta\cos\phi, \qquad y = a\sin\theta\sin\phi, \qquad z = a\cos\theta,$$

gdje je $\theta = \theta(\phi)$ jest krivulja $\alpha : [0, 2\pi] \to E^3$ koje graf leži na kugli.

68. Pokazati da graf krivulje $\alpha : [0, 2\pi] \to E^3$:

$$x = a\sin^2 t, \qquad y = b\sin t\cos t, \qquad z = c\cos t$$

leži na elipsoidu.

69. Pokazati da graf krivulje $\alpha : \mathbf{R} \to E^3$:

$$x = \frac{t}{1+t^2+t^4}, \quad y = \frac{t^2}{1+t^2+t^4}, \quad z = \frac{t^3}{1+t^2+t^4}$$

leži na kugli sa središtem u točki $S\left(0, \frac{1}{2}, 0\right)$ i polumjerom $R = \frac{1}{2}$.

70. Pokazati da graf krivulje $\alpha : \mathbf{R} \to E^3$:

$$x = t\cos t, \qquad y = t\sin t, \qquad z = ct$$

leži na kružnom stošcu.

71. Pokazati da graf krivulje $\alpha : \mathbf{R} \to E^3$:

$$x = at\cos t, \qquad y = at\sin t, \qquad z = \frac{a^2t^2}{2p}$$

leži na rotacionom paraboloidu i da je njena projekcija na ravninu XOY Arhimedova spirala.

72. Naći projekciju grafa krivulje $\alpha : \mathbf{R} \to E^3$:

$$x = t, \qquad y = t^2, \qquad z = t^3$$

na koordinatne ravnine.

73. Pokazati da graf krivulje $\alpha : \mathbf{R} \to E^3$:

$$x = a\,\mathrm{ch}\,t, \qquad y = a\,\mathrm{sh}\,t, \qquad z = ct$$

leži u hiperboličkom valjku i naći njezine projekcije na koordinatne ravnine.

74. Pokazati da graf krivulje $\alpha : [0, 2\pi] \to E^3$

$$x = a\,\mathrm{tg}\,t, \qquad y = b\cos t, \qquad z = b\sin t$$

leži na hiperboličkom paraboloidu i naći projekcije njenog grafa na koordinatne ravnine.

75. Krivulju $\alpha : \mathbf{R} \to E^3$

$$x = t, \qquad y = t^2, \qquad z = e^t$$

predočiti kao presjek dviju ploha.

76. Pokazati da je graf krivulje $\alpha : [0, 2\pi] \to E^3$

$$\vec{r} = \{a\cos t, \quad a\sin t, \quad b\sin 2t\}$$

presjek kružnog valjka i hiperboličkog paraboloida.

77. Pokazati da se graf krivulje:

$$x^2 + z^2 = a^2, \qquad y^2 + z^2 = a^2$$

nalazi u dvije međusobno okomite ravnine.

78. Naći projekciju grafa krivulje:

$$z = x^2 + y^2, \qquad x + y + z = 1$$

(presjek ravnine i kružnog paraboloida) na koordinatnu ravninu XOY.

79. Naći duljinu luka krivulje $\alpha : \mathbf{R} \to E^3$:

$$\vec{r} = \left\{t, \quad t^2, \quad \frac{2}{3} t^3\right\},$$

od $t = 0$ do $t = 2$.

80. Naći duljinu luka krivulje $\alpha : \mathbf{R} \to E^3$:

$$\vec{r} = \{e^t \cos t, \ e^t \sin t, \ e^t\}$$

od $t = 0$ do $t = t$.

81. Naći duljinu luka krivulje $\alpha : \mathbf{R} \to E^3$:

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t), \quad z = 4a \cos \frac{t}{2}$$

između njezina dva sjecišta s ravninom XOZ.

82. Naći duljinu luka krivulje

$$x^3 = 3a^2 y, \quad 2xz = a^2$$

među ravninama $y = \dfrac{a}{3}$, $y = 9a$.

83. Pokazati da zatvorena krivulja $\alpha : [0, \pi] \to E^3$:

$$x = \cos^3 t, \quad y = \sin^3 t, \quad z = \cos 2t$$

ima duljinu $s = 15$.

84. Naći duljinu luka krivulje $\alpha : \mathbf{R} \to E^3$:

$$x = a \operatorname{ch} t, \quad y = a \operatorname{sh} t, \quad z = at$$

među točkama 0 i t.

85. Naći duljinu luka krivulje $\alpha : \mathbf{R}^+ \to E^3$:

$$x = ct, \quad y = c\sqrt{2} \ln t, \quad z = \frac{c}{t}$$

među točkama $t = 1$, $t = 10$.

86. Zadana je krivulja $\alpha : \mathbf{R}^+ \to E^3$:

$$\vec{r} = \left\{t + \frac{a^2}{t}, \quad t - \frac{a^2}{t}, \quad 2a \ln \frac{t}{a}\right\}.$$

1°. Pokazati da je njezin graf presjek ploha

$$x^2 - y^2 = 4a^2 \ \text{ i } \ z = 2a^2 \ln \frac{x + y}{2a}.$$

2°. Pokazati da je duljina luka dane krivulje od točke na x-osi do proizvoljne točke proporcionalna s y-ordinatom te krivulje.

87. Naći izraz za ds krivulje u cilindričnim koordinatama.

88. Naći izraz za ds krivulje u sfernim koordinatama.

Rješenja

63. $x^2 - y^2 - x - y + 1 = 0$.

64. $y^2 + z^2 - 2y + 4z - 4 = 0$.

65. $a = 2$, $b = \sqrt{2}$.

66. $x^2 + z^2 + xz + 2x + 2z + 1 = 0$.

71. Krivulja leži na plohama: $x^2 + y^2 = 2pz$ (rotacioni paraboloid) i $\dfrac{y}{x} = \operatorname{tg} \dfrac{\sqrt{2pz}}{a}$; njena projekcija na ravninu XOY jest $r = a\phi$.

72. $y = x^2$, $z = x^3$, $y^3 = z^2$.

73. $x^2 - y^2 = a^2$, $x = a \operatorname{ch} \dfrac{z}{c}$, $y = a \operatorname{sh} \dfrac{z}{c}$.

74. Krivulja leži na plohama: $y^2 + z^2 = b^2$ i $az = xy$ (hiperbolički paraboloid), $y^2 + z^2 = b^2$, $y^2(a^2 + x^2) = a^2 b^2$, $z^2(a^2 + x^2) = b^2 x^2$.

75. $y = x^2$, $z = e^x$.

76. $x^2 + y^2 = a^2$, $2bxy = a^2 z$.

77. $x + y = 0$, $x - y = 0$.

78. Projekcija je kružnica sa središtem $S = \left(-\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}\right)$ i radiusom $r = \sqrt{\dfrac{3}{2}}$.

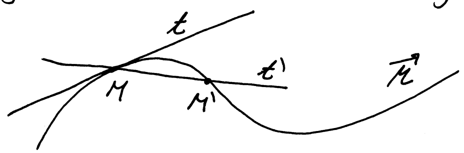
79. $\dfrac{22}{3}$. **80.** $\sqrt{3}\,(e^t - 1)$. **81.** $8a\sqrt{2}$.

82. $9a$. **84.** $a\sqrt{2} \operatorname{sh} t$. **85.** $9{,}9\,c$. **87.** $ds^2 = dr^2 + r^2 d\phi^2 + dz^2$.

88. $ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta \, d\phi^2$.

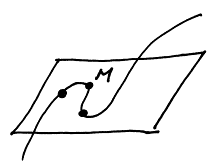
Normalna, oskulatorna i rektifikaciona ravan

Tangenta (dirka) na krivu $\vec{r}$ u tački M je prava $\vec{t}$ koja predstavlja granični položaj sječice MM' (vidi sliku) kada se druga tačka M' krive neograničeno približava tački M.



Normalna ravan prostorne krive u datoj tački M je ravan koja prolazi kroz tačku M i normalna je na tangentu krive u toj tački

Oskulatorna ravan u tački M krive $\vec{r}$ se može tumačiti kao ravan koja se dobije kao granični položaj promjenjive ravni koja prolazi kroz tri tačke krive, kada te tačke teže tački M.



Binormala prostorne krive $\vec{r}$ u tački M je prava normalna na oskulatornu ravan te krive u tački M.

Rektifikaciona ravan je ravan koja prolazi kroz tangentu i binormalu u datoj tački M prostorne krive.

(#) Naći jedinične vektore tangente, normale i binormale za krivu

$$\vec{r} = (\cos t + \sin^2 t)\,\vec{i} + \sin t\,(1-\cos t)\,\vec{j} - \cos t\,\vec{k}$$

u tački A u kojoj je $t=\frac{\pi}{2}$ i napisati u istoj tački jednačine normalne, oskulatorne i rektifikacione ravni.

Rj.

$\vec{t} = \dot{\vec{r}}$ vektor tangente

$\vec{b} = \dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}$ vektor binormale

$\vec{n} = \vec{b} \times \vec{t}$ vektor normale

Kako je

$$\dot{\vec{r}} = (-\sin t + 2\sin t\cos t,\ \cos t(1-\cos t) + \sin t\cdot\sin t,\ \sin t) = (-\sin t + \sin 2t,\ \cos t - \cos 2t,\ \sin t)$$

$$\ddot{\vec{r}} = (-\cos t + 2\cos 2t,\ 2\sin 2t - \sin t,\ \cos t)$$

to je u tački A vektor u pravcu tangente

$$\vec{t} = \dot{\vec{r}}\Big|_{t=\frac{\pi}{2}} = (-1, 1, 1)$$

a $\vec{t}_0 = \dfrac{\vec{t}}{|\vec{t}|} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(-1,1,1)$.

Vektor $\vec{b}$ u pravcu binormale u tački A je

$$\vec{b} = \dot{\vec{r}}\Big|_{t=\frac{\pi}{2}} \times \ddot{\vec{r}}\Big|_{t=\frac{\pi}{2}} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (1, -2, 3)$$

dok je

$$\vec{b}_0 = \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{1}{\sqrt{14}}(1,-2,3)$$

Primjetimo $\vec{t} \perp \vec{b}$

Vektor $\vec{n}$ u pravcu normale je

$$\vec{n} = \vec{b} \times \vec{t} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-5, -4, -1)$$

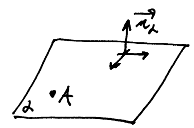
Primjetimo
$\vec{n} \perp \vec{b}$
$\vec{n} \perp \vec{t}$

a $$\vec{n}_0 = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \frac{1}{\sqrt{42}}(-5, -4, -1)$$

Tačka A ima koordinate $A(\overset{x_1}{1}; \overset{y_1}{1}; \overset{z_1}{0})$

Vektori $\vec{t}$ i $\vec{n}$ određuju oskulatornu ravan, $M, \vec{b}$ i $\vec{n}$ normalnu ravan, a $M, \vec{b}$ i $\vec{t}$ rektifikacionu ravan krive u tački M krive.

$$\vec{t} \times \vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & 1 \\ -5 & -4 & -1 \end{vmatrix} = (3, -6, 9) = 3(1, -2, 3)$$ vektor normale na oskulatornu ravan



$A(x-x_1) + B(y-y_1) + C(z-z_1) = 0$ jednačina ravni kroz tačku

$1 \cdot (x-1) - 2(y-1) + 3(z-0) = 0$

$x - 2y + 3z + 1 = 0$ jednačina oskulatorne ravni

$$\vec{b} \times \vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 3 \\ -5 & -4 & -1 \end{vmatrix} = (14, -14, -14) = 14(1, -1, -1)$$

$1(x-1) - 1(y-1) - 1(z-0) = 0$

$x - y - z = 0$ jednačina normalne ravni

$$\vec{b} \times \vec{t} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-5, -4, -1)$$

$-5(x-1) - 4(y-1) - 1(z-0) = 0$

$-5x - 4y - z + 9 = 0$ jednačina rektifikacione ravni

#) Naći jednačinu normalne, oskulatorne i rektifikacione ravni krive $\vec{r} = (t^3 - t^2 - 5,\ 3t^2 + 1,\ 2t^3 - 16)$ u tački $t = 2$. U istoj tački odrediti jednačine tangente, binormale i glavne normale krive.

Rj. Vektori $\vec{t}$ i $\vec{n}$ određuju oskulatornu ravan.

$$\vec{t} = \dot{\vec{r}} = (3t^2 - 2t,\ 6t,\ 6t^2), \quad \vec{t}_A = (8, 12, 24) = 4(2, 3, 6)$$

Tačku na krivoj ćemo dobiti kad uvrstimo u jednačinu krive $t = 2$; biće $A(-1, 13, 0)$.

$$\vec{b} = \dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}$$

$$\ddot{\vec{r}} = (6t - 2,\ 6,\ 12t), \quad \ddot{\vec{r}}\Big|_A = (10, 6, 24) = 2(5, 3, 12)$$

$$\vec{b}_A = 4 \cdot 2 \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & 6 \\ 5 & 3 & 12 \end{vmatrix} = 8(18, 6, -9)$$

$$\vec{b}_A = 24(6, 2, -3)$$

$$\vec{n} = \vec{b} \times \vec{t} \qquad \vec{n}_A = 24 \cdot 4 \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 6 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 96(21, -42, 14)$$

$$\vec{n}_A = 96 \cdot 7(3, -6, 2)$$

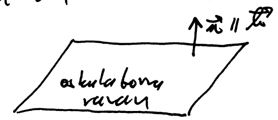
Kako za jednačine normalne, oskulatorne i rektifikacione ravni ne igra ulogu intenzitet već samo pravci vektora to ćemo uzeti da je

$\vec{t}_A = (2, 3, 6)$
$\vec{b}_A = (6, 2, -3)$
$\vec{n}_A = (3, -6, 2)$

Primjetimo da $\vec{t} \perp \vec{b}$, $\vec{t} \perp \vec{n}$ i $\vec{b} \perp \vec{n}$.

Vektori $\vec{t}$ i $\vec{n}$ određuju oskulatornu ravan

$A(-1, 13, 0)$, $\vec{b} = (6, 2, -3)$

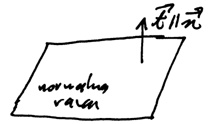


$A(x-x_1) + B(Y-Y_1) + C(Z-Z_1) = 0$

$6(x+1) + 2(Y-13) - 3(Z-0) = 0$

$6x + 2Y - 3Z = 20$ jednačina oskulatorne ravni

Vektori $\vec{b}$ i $\vec{n}$ određuju normalnu ravan

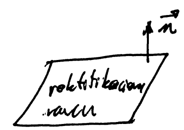


$\vec{t} = (2, 3, 6)$

$2(x+1) + 3(Y-13) + 6(Z-0) = 0$

$2x + 3Y + 6Z = 37$ jednačina normalne ravni

Vektori $\vec{b}$ i $\vec{t}$ određuju rektifikacionu ravan



$\vec{n} = (3, -6, 2)$

$3(x+1) - 6(Y-13) + 2(Z-0) = 0$

$3x - 6Y + 2Z = -81$ jednačina rektifikacione ravni

$\vec{t} = (2, 3, 6)$

$$\frac{x+1}{2} = \frac{Y-13}{3} = \frac{Z-0}{6}$$ jednačina tangente

$\vec{b} = (6, 2, -3)$

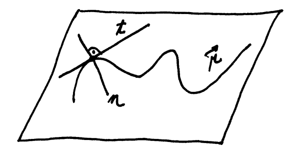
$$\frac{x+1}{6} = \frac{Y-13}{2} = \frac{Z-0}{-3}$$ jednačina binormale

$\vec{n} = (3, -6, 2)$

$$\frac{x+1}{3} = \frac{Y-13}{-6} = \frac{Z-0}{2}$$ jednačina glavne normale

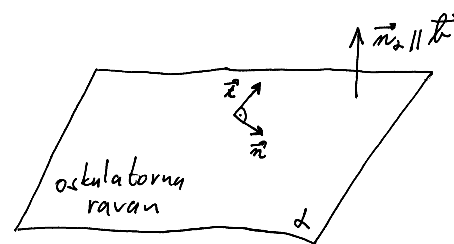
(#) Pokazati da linija
$$x = at^2 + bt + c$$
$$Y = a_1 t^2 + b_1 t + c_1$$
$$Z = a_2 t^2 + b_2 t + c_2$$
leži u jednoj ravni i naći jednačinu te ravni.

Rj: Posmatrajmo neku krivu $\vec{r}$ koja leži u ravni.



Da li tada i tangenta u svakoj tački krive leži u istoj ravni? Da li normala proizvoljne tačke krive pripada ravni?

Odgovor na oba pitanja je pozitivan. Znamo da t i n određuju oskulatornu ravan. Šta znači kada je jednačina oskulatorne ravni u svim tačkama krive ista



znamo da je vektor normale na ravan paralelan sa vektorom binormale.

$\vec{b} = \dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}$

$$\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2at+b & 2a_1t+b_1 & 2a_2t+b_2 \\ 2a & 2a_1 & 2a_2 \end{vmatrix}$$

Znamo da je $A(x-x_1) + B(Y-Y_1) + C(Z-Z_1) = 0$ jednačina ravni kroz jednu tačku pa je

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & Y-Y_1 & Z-Z_1 \\ 2at+b & 2a_1t+b_1 & 2a_2t+b_2 \\ 2a & 2a_1 & 2a_2 \end{vmatrix} = 0$$

jednačina oskulatorne ravni krive u tački $M(x_1; Y_1; Z_1)$

Iz linearne algebre znamo da $\begin{vmatrix} A & B & C \\ E+F & G+J & H+X \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & B & C \\ E & G & H \\ P & Q & R \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A & B & C \\ F & J & X \\ P & Q & R \end{vmatrix}$

Pa imamo

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ 2at+b & 2a_1t+b_1 & 2a_2t+b_2 \\ 2a & 2a_1 & 2a_2 \end{vmatrix} = \underbrace{\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ 2at & 2a_1t & 2a_2t \\ 2a & 2a_1 & 2a_2 \end{vmatrix}}_{=0 \text{ (objasniti zašto?)}} +$$

$$+ \begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ b & b_1 & b_2 \\ 2a & 2a_1 & 2a_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-(at^2+bt+c) & y-(a_1t^2+b_1t+c_1) & z-(a_2t^2+b_2t+c_2) \\ b & b_1 & b_2 \\ 2a & 2a_1 & 2a_2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x & y & z \\ b & b_1 & b_2 \\ 2a & 2a_1 & 2a_2 \end{vmatrix} - \underbrace{\begin{vmatrix} -at^2 & -a_1t^2 & -a_2t^2 \\ b & b_1 & b_2 \\ 2a & 2a_1 & 2a_2 \end{vmatrix}}_{=0} - \underbrace{\begin{vmatrix} bt & b_1t & b_2t \\ b & b_1 & b_2 \\ 2a & 2a_1 & 2a_2 \end{vmatrix}}_{=0} - \begin{vmatrix} c & c_1 & c_2 \\ b & b_1 & b_2 \\ 2a & 2a_1 & 2a_2 \end{vmatrix}$$

(objasniti zašto?)

Dobili smo da je jednačina oskulatorne ravni

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ b & b_1 & b_2 \\ 2a & 2a_1 & 2a_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} c & c_1 & c_2 \\ b & b_1 & b_2 \\ 2a & 2a_1 & 2a_2 \end{vmatrix} = 0$$

Iz zadnje jednačine se vidi da u njoj ne figuriše t, tj. oskulatorne ravni u svim tačkama krive se poklapaju, što znači da je kriva ravna.

Jednačina oskulatorne ravni ne zavisi od parametra t, ne zavisi od izbora tačke krive

Napomena:

Iz rješenja prethodnog zadatka možemo primjetiti da je za krivu $\vec{r} = (x(t), y(t), z(t))$

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ \ddot{x} & \ddot{y} & \ddot{z} \end{vmatrix} = 0$$

jednačina oskulatorne ravni u tački $M(x_1, y_1, z_1)$

$$\dot{x}(x-x_1) + \dot{y}(y-y_1) + \dot{z}(z-z_1) = 0$$

jednačina normalne ravni u tački $M(x_1, y_1, z_1)$

$$\ddot{x}(x-x_1) + \ddot{y}(y-y_1) + \ddot{z}(z-z_1) = 0$$

jednačina rektifikacione ravni u tački $M(x_1, y_1, z_1)$

Odrediti jednačinu rektifikacione ravni krive

$L: x^2 = 2z,\ y^2 = 2z$ u proizvoljnoj tački M_0 te krive.

Rj. Prisjetimo se

Jednačina rektifikacione ravni krive $L: \begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t) \\ t\in I \end{cases}$ u tački $M_0(x_0, y_0, z_0)$ je

$$\ddot{x}(x-x_0)+\ddot{y}(y-y_0)+\ddot{z}(z-z_0)=0$$

(tačka M_0 te vektori $\vec{b}$ i $\vec{t}$ određuju rektifikacionu ravan krive)

Parametrizirajmo datu krivu

$$\left.\begin{array}{l} x^2=2z \\ y^2=2z \end{array}\right\} \Rightarrow x^2=y^2 \Rightarrow y=\pm x$$

Primjetimo da je $z=\frac{1}{2}x^2$

Ako sa t označimo x imamo $L: \begin{cases} x=t \\ y=\pm t \\ z=\frac{1}{2}t^2 \\ t\in\mathbb{R} \end{cases}$

$$\begin{array}{ll} \dot{x}=1 & \ddot{x}=0 \\ \dot{y}=\pm 1 & \ddot{y}=0 \\ \dot{z}=t & \ddot{z}=1 \end{array}$$

Ako je $M_0 \in L$ tada $M_0(t_0, \pm t_0, \frac{1}{2}t_0^2)$

Jednačina rektifikacione ravni u tački M_0 je $z-\frac{1}{2}t_0^2=0$.

Pokazati da normalne ravni krive

$L: x=a\sin^2 t,\ y=a\sin t\cos t,\ z=a\cos t$

prolaze kroz koordinatni početak.

PITANJE: Kako glasi jednačina ravni koja prolazi kroz koordinatni početak?

Rj. Prisjetimo se

Jednačina normalne ravni u nekoj tački $M_0(x_0, y_0, z_0)$ krive $L: \begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t) \\ t\in I \end{cases}$ je $\dot{x}(x-x_0)+\dot{y}(y-y_0)+\dot{z}(z-z_0)=0$.

(tačka M_0 i vektori $\vec{b}$ i $\vec{n}$ određuju normalnu ravan).

$$\dot{x}=2a\sin t\cos t=a\sin 2t$$
$$\dot{y}=a\cos^2 t-a\sin^2 t=a\cos 2t$$
$$\dot{z}=-a\sin t$$

vektor tangente je $\vec{t}=(a\sin 2t, a\cos 2t, -a\sin t)$

Jednačina normalne ravni krive u proizvoljnoj tački ima oblik

$$a\sin 2t(x-a\sin^2 t)+a\cos 2t(y-a\sin t\cos t)-a\sin t(z-a\cos t)=0 \quad /:a$$

$$(\sin 2t)x+(\cos 2t)y-(\sin t)z+$$
$$+(-a)\sin^2 t\underbrace{\sin 2t}_{2\sin t\cos t}+(-a)\sin t\cos t\underbrace{\cos 2t}_{(\cos^2 t-\sin^2 t)}+a\sin t\cos t=0$$

$(-a)\sin^2 t\sin t\cos t$

$$(\sin 2t)x+(\cos 2t)y-(\sin t)z+(-a)2\sin^2 t\sin t\cos t+a\sin^2 t\sin t\cos t$$
$$+(-a)\cos^2 t\sin t\cos t+a\sin t\cos t=0$$

$$(\sin 2t)x + (\cos 2t)y - (\sin t)z = 0$$

jednačina normalne ravni krive

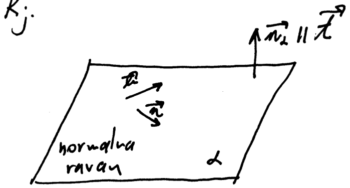
iz čega vidimo da ravan sadrži tačku $O(0,0,0)$.

Dokazati da normalne ravni krive

$$\vec{r}: \begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin\alpha \sin t \\ z = a\cos\alpha \sin t \end{cases}$$

prolaze kroz pravu $x = 0, \quad z + y\,\mathrm{tg}\,\alpha = 0$.

Rj.



$\vec{t} = \dot{\vec{r}}$

Jednačina normalne ravni u nekoj tački krive (x_1, y_1, z_1) je

$$\dot{x}(x - x_1) + \dot{y}(y - y_1) + \dot{z}(z - z_1) = 0$$

$\dot{x} = -a\sin t$

$\dot{y} = a\sin\alpha\cos t$

$\dot{z} = a\cos\alpha\cos t$

Za krivu $\vec{r}$ jednačina normalne ravni je

$$-a\sin t(x - a\cos t) + a\sin\alpha\cos t \cdot (y - a\sin\alpha\sin t) + a\cos\alpha\cos t(z - a\cos\alpha\sin t) = 0 \quad /: a$$

tj.

$$(-\sin t)x + (\sin\alpha\cos t)y + (\cos\alpha\cos t)z + a\sin t\cos t \underbrace{- a\sin^2\alpha\sin t\cos t - a\cos^2\alpha\sin t\cos t}_{= -a\sin t\cos t(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)} = 0$$

$$(-\sin t)x + (\sin\alpha\cos t)y + (\cos\alpha\cos t)z = 0$$

jednačina normalne ravni krive

Naša (data) prava leži u yOz ravni.

Kako naći presjek neke ravni sa ravni $x = 0$?

$x = 0$ je yOz ravan.

Presjek normalne ravni krive sa ravni $x = 0$ je

$$(\sin\alpha\cos t)y + (\cos\alpha\cos t)z = 0 \quad /: \cos\alpha\cos t$$

$$z + y\,\mathrm{tg}\,\alpha = 0$$

Prema tome normalne ravni krive $\vec{r}$ prolaze kroz pravu

Napomena:

U tačkama krive $\vec{r}=(a\cos t, a\sin\alpha\sin t, a\cos\alpha\sin t)$ u kojima je $t=\pm\frac{\pi}{2}+2k\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$ normalna ravan se poklapa sa ravni $x=0$.

Objasniti zašto?

U tačkama krive $\vec{r}$ u kojima je $t=k\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$ normalna ravan je sama ravan $z+y\,tg\alpha=0$, što se lako vidi uvrste li se odgovarajuće vrijednosti za t u jednačinu normalne ravni.

Data je kriva $x=\frac{1}{2}\sin^2 t$, $y=\frac{1}{2}(t+\sin t\cos t)$, $z=\sin t$.

a) Odrediti jednačine tangente, binormale i glavne normale u proizvoljnoj tački.

b) Dokazati da svaka od pravih pod a) zaklapa sa z-osom konstantan ugao.

Rj.

a) $\vec{t}=\dot{\vec{r}}$, $\dot{\vec{r}}=\left(\frac{1}{2}2\sin t\cos t, \frac{1}{2}(1+\cos^2 t-\sin^2 t), \cos t\right)$

$$=\left(\sin t\cos t, \tfrac{1}{2}(\cancel{\sin^2 t}+\cos^2 t+\cos^2 t-\cancel{\sin^2 t}), \cos t\right)$$

$$=(\sin t\cos t, \cos^2 t, \cos t)$$

Za $\vec{t}$ možemo uzeti $\vec{t}=(\sin t, \cos t, 1)$ vektor tangente

$\vec{b}=\dot{\vec{r}}\times\ddot{\vec{r}}$, $\quad\ddot{\vec{r}}=(\cos^2 t-\sin^2 t, -2\sin t\cos t, -\sin t)$

$$=(\cos 2t, -\sin 2t, -\sin t)$$

Kako je

$$\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \sin t & \cos t & 1\\ \cos 2t & -\sin 2t & -\sin t\end{vmatrix}=(-\sin t\cos t+\sin 2t, \sin^2 t+\cos 2t, -\sin t\underbrace{\sin 2t}_{2\sin t\cos t}-\cos t\underbrace{\cos 2t}_{\underbrace{\cos^2 t-\sin^2 t}_{1-\sin^2 t}})=$$

$$=(\sin t\cos t, \cos^2 t, -\cos t)$$

možemo uzeti $\vec{b}=(\sin t, \cos t, -1)$ vektor binormale

$\vec{n}\parallel\vec{b}\times\vec{t}$

$$\vec{b}\times\vec{t}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \sin t & \cos t & -1\\ \sin t & \cos t & 1\end{vmatrix}=(2\cos t, -2\sin t, 0)$$

$$\vec{n}=(\cos t, -\sin t, 0)$$

t: $\dfrac{x-\frac{1}{2}\sin^2 t}{\sin t}=\dfrac{y-\frac{1}{2}(t+\sin t\cos t)}{\cos t}=\dfrac{z-\sin t}{1}$ jednačina tangente

b: $\dfrac{x-\frac{1}{2}\sin^2 t}{\sin t}=\dfrac{y-\frac{1}{2}(t+\sin t\cos t)}{\cos t}=\dfrac{z-\sin t}{-1}$ jednačina binormale

n: $\dfrac{x-\frac{1}{2}\sin^2 t}{\cos t}=\dfrac{y-\frac{1}{2}(t+\sin t\cos t)}{-\sin t}=\dfrac{z-\sin t}{0}$ jednačina normale

b) z-osa ima vektor pravca $\vec{p}=(0,0,1)$

$\vec{p}\cdot\vec{t}=|\vec{p}||\vec{t}|\cdot\cos\measuredangle(\vec{p},\vec{t})$, vektor tangente $\vec{t}=(\sin t,\cos t,1)$

$$\cos\gamma_t=\frac{\vec{p}\cdot\vec{t}}{|\vec{p}||\vec{t}|}\qquad \vec{p}\cdot\vec{t}=1,\quad |\vec{p}|=1,\quad |\vec{t}|=\sqrt{\sin^2t+\cos^2t+1}=\sqrt{2}$$

$$\cos\gamma_t=\frac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow\gamma_t=\frac{\pi}{4}$$

vektor binormale $\vec{b}=(\sin t,\cos t,-1)$

$|\vec{b}|=\sqrt{2}$

$$\cos\gamma_b=\frac{-1}{\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\gamma_b=\frac{3\pi}{4}$$

vektor normale $\vec{n}=(\cos t,-\sin t,0)$

$|\vec{n}|=\sqrt{\cos^2t+\sin^2t+0}=1$

$$\cos\gamma_n=\frac{0}{1\cdot1}=0\Rightarrow\gamma_n=\frac{\pi}{2}$$

Kriva L u prostoru se zadaje *parametarski* na sledeći način:

$$L:\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\\ z=z(t)\end{cases},\quad t\in I,\tag{1}$$

(*skalarni* oblik), ili

$$L:\vec{r}(t)=\big(x(t),y(t),z(t)\big),\quad t\in I\tag{1'}$$

(*vektorski* oblik), gde je $I\subset R$ interval u širem smislu (otvoren, zatvoren, poluotvoren, konačan ili beskonačan), a funkcije $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ neprekidne, diferencijabilne ili neprekidno-diferencijabilne, zavisno od potrebe.

Kriva L može još biti zadata i na sledeće načine:

$$L:\begin{cases}y=y(x)\\ z=z(x),\end{cases}\quad x\in I\tag{2}$$

(*eksplicitni* oblik);

$$L:\begin{cases}F_1(x,y,z)=0\\ F_2(x,y,z)=0\end{cases}\tag{3}$$

(*implicitni oblik*).

Površ S ($S\subset\mathbb{R}^3$) se zadaje *parametarski* na sledeći način:

$$S:\begin{cases}x=x(u,v)\\ y=y(u,v)\\ z=z(u,v)\end{cases},\quad (u,v)\in\triangle\tag{4}$$

(*skalarni* oblik), ili

$$S:\vec{r}(u,v)=(x(u,v),y(u,v),z(u,v)),\tag{4'}$$

(*vektorski* oblik), gde je $\triangle$ dvodimenzionalni povezan skup u ravni uOv, a $x(u,v)$, $y(u,v)$, $z(u,v)$ su funkcije dve promenljive koje zadovoljavaju slične uslove kao što je spomenuto za funkcije date u (1).

Ostali oblici jednačina površi S:

$$S:z=z(x,y),(x,y)\in D\quad (D\subset xOy)\tag{5}$$

(*eksplicitni* oblik);

Izabrani zadaci za vježbu (iz lekcija "Vektor tangente" i "Normalna, oskulatorna i rektifikaciona ravan")

Tablica 3.

Vektorske jednadžbe	Skalarne jednadžbe
	Tangenta:
$\vec r = \vec r(t_0) + \mu \dot{\vec r}(t_0)$	$\dfrac{x-x_0}{\dot x_0} = \dfrac{y-y_0}{\dot y_0} = \dfrac{z-z_0}{\dot z_0}$
	Glavna normala:
$\vec r = \vec r_0 + \mu\,[(\dot{\vec r}_0 \times \ddot{\vec r}_0) \times \dot{\vec r}_0]$	$\dfrac{x-x_0}{\begin{vmatrix} \dot y_0 & \dot z_0 \\ m & n \end{vmatrix}} = \dfrac{y-y_0}{\begin{vmatrix} \dot z_0 & \dot x_0 \\ n & l \end{vmatrix}} = \dfrac{z-z_0}{\begin{vmatrix} \dot x_0 & \dot y_0 \\ l & m \end{vmatrix}}$ Gdje je: $l = \begin{vmatrix} \dot y_0 & \dot z_0 \\ \ddot y_0 & \ddot z_0 \end{vmatrix}, \quad m = \begin{vmatrix} \dot z_0 & \dot x_0 \\ \ddot z_0 & \ddot x_0 \end{vmatrix}, \quad n = \begin{vmatrix} \dot x_0 & \dot y_0 \\ \ddot x_0 & \ddot y_0 \end{vmatrix}$
	Binormala:
$\vec r = \vec r_0 + \mu\,(\dot{\vec r}_0 \times \ddot{\vec r}_0)$	$\dfrac{x-x_0}{\begin{vmatrix} \dot y_0 & \dot z_0 \\ \ddot y_0 & \ddot z_0 \end{vmatrix}} = \dfrac{y-y_0}{\begin{vmatrix} \dot z_0 & \dot x_0 \\ \ddot z_0 & \ddot x_0 \end{vmatrix}} = \dfrac{z-z_0}{\begin{vmatrix} \dot x_0 & \dot y_0 \\ \ddot x_0 & \ddot y_0 \end{vmatrix}}$
	Normalna ravnina:
$(\vec r - \vec r_0) \cdot \dot{\vec r}_0 = 0$	$\dot x_0 (x-x_0) + \dot y_0 (y-y_0) + \dot z_0 (z-z_0) = 0$
	Rektifikaciona ravnina:
$(\vec r - \vec r_0) \cdot [(\dot{\vec r}_0 \times \ddot{\vec r}_0) \times \dot{\vec r}_0] = 0$	$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ \dot x_0 & \dot y_0 & \dot z_0 \\ l & m & n \end{vmatrix} = 0$
	Oskulaciona ravnina:
$(\vec r - \vec r_0) \cdot (\dot{\vec r}_0 \times \ddot{\vec r}_0) = 0$ ili $(\vec r - \vec r_0,\ \dot{\vec r}_0,\ \ddot{\vec r}_0) = 0$	$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ \dot x_0 & \dot y_0 & \dot z_0 \\ \ddot x_0 & \ddot y_0 & \ddot z_0 \end{vmatrix} = 0$

Zadaci

89. Neka se dokažu formule iz tablica 1, 2. i 3.

1° Dokažimo najprije formule iz tablica 1. i 2.

a) Neka je $\vec r = \vec r(s) = x(s)\,\vec i + y(s)\,\vec j + z(s)\,\vec k$ vektorska jednadžba krivulje $\alpha : I \to E^3$ (s je duljina luka te krivulje. U točki $\alpha(s_0)$, $s_0 \in I$ krivulje) α prema § 4.1. definiran je vektor tangente s:

$$\vec t^{\,0}(s_0) = \frac{d\vec r}{ds}(s_0) = \vec r_0{}' = x_0{}'\,\vec i + y_0{}'\,\vec j + z_0'\,\vec k.$$

Kako točka $\alpha(s_0)$ leži i na krivulji α, to vrijedi:

$$\vec r_0 = \vec r(s_0) = x_0\vec i + y_0\vec j + z_0\vec k,$$

a kako je vektor $\vec r - \vec r_0$ kolinearan s vektorom $\vec t^{\,0}(s_0) = \vec r_0{}'$, to *vektorska jednadžba tangente* glasi:

$$\vec r = \vec r_0 + \mu\,\vec r_0',$$

a *skalarne jednadžbe tangente* glase:

$$\frac{x-x_0}{x_0{}'} = \frac{y-y_0}{y_0{}'} = \frac{z-z_0}{z_0{}'}.$$

Ova jednadžba zove se još kanonski oblik jednadžbe tangente. Tangenta u točki $\alpha(s_0)$ krivulje α kolinearna je s vektorom normale na normalnu ravninu, pa *vektorska jednadžba normalne ravnine* glasi:

$$(\vec r - \vec r_0) \cdot \vec r_0{}' = 0,$$

a skalarna jednadžba:

$$x_0{}'(x-x_0) + y_0{}'(y-y_0) + z_0{}'(z-z_0) = 0.$$

b) Neka je $\vec r = \vec r(s) = x(s)\,\vec i + y(s)\,\vec j + z(s)\,\vec k$ vektorska jednadžba krivulje $\alpha : I \to E^3$. U točki $\alpha(s_0)$, $s_0 \in I$ krivulje α prema § 4.1. definiran je vektor glavne normale s:

$$\vec n^{\,0}(s_0) = \frac{\dfrac{d^2\vec r}{ds^2}(s_0)}{\left|\dfrac{d^2\vec r}{ds^2}(s_0)\right|} = \frac{\vec r''(s_0)}{|\vec r''(s_0)|} = \frac{\vec r_0{}''}{|\vec r_0{}''|} = \frac{x_0{}''\vec i + y_0{}''\vec j + z_0{}''\vec k}{\sqrt{x_0{}''^2 + y_0{}''^2 + z_0{}''^2}}.$$

Kako je vektor $\vec r - \vec r_0$ kolinearan s vektorom $\vec n^{\,0}(s_0) = \dfrac{\vec r_0{}''}{|\vec r_0{}''|}$,

to *vektorska jednadžba glavne normale* glasi:

$$\vec r = \vec r_0 + \mu_1 \frac{\vec r_0{}''}{|\vec r_0{}''|},$$

odnosno

$$\vec r = \vec r_0 + \mu\,\vec r_0{}'', \quad \left(\mu = \frac{\mu_1}{|\vec r_0{}''|}\right), \text{ a}$$

njene skalarne jednadžbe (kanonski oblik jednadžbe):

$$\frac{x-x_0}{x_0''}=\frac{y-y_0}{y_0''}=\frac{z-z_0}{z_0''}.$$

Glavna normala u točki $\alpha(s_0)$ krivulje α kolinearna je s vektorom normale na rektifikacionu ravninu, pa *vektorska jednadžba rektifikacione* ravnine glasi:

$$(\vec{r}-\vec{r}_0)\cdot\frac{\vec{r}_0''}{|\vec{r}_0''|}=0,$$

odnosno:

$$(\vec{r}-\vec{r}_0)\cdot\vec{r}_0''=0,$$

a njena skalarna jednadžba:

$$x_0''(x-x_0)+y_0''(y-y_0)+z_0''(z-z_0)=0.$$

c) Neka je zadana krivulja kao u a) i b).

U točki $\alpha(s_0)$, $s_0\in I$ krivulje α definiran je prema § 4.1. vektor binormale s:

$$\vec{b}^0(s_0)=\vec{t}^0(s_0)\times\vec{n}^0(s_0).$$

Tada je:

$$\vec{b}^0(s_0)=\vec{r}_0'\times\frac{\vec{r}_0''}{|\vec{r}_0''|}=\mu_1(\vec{r}_0'\times\vec{r}_0''),\qquad\left(\mu_1=\frac{1}{|\vec{r}_0''|}\right).$$

Odnosno:

$$\vec{b}^0(s_0)=\mu_1\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ x_0'&y_0'&z_0'\\ x_0''&y_0''&z_0''\end{vmatrix}=$$

$$=\mu_1\left\{\begin{vmatrix}y_0'&z_0'\\ y_0''&z_0''\end{vmatrix}\vec{i}+\begin{vmatrix}z_0'&x_0'\\ z_0''&x_0''\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}x_0'&y_0'\\ x_0''&y_0''\end{vmatrix}\vec{k}\right\}.$$

Vektor $\vec{r}-\vec{r}_0$ kolinearan je s vektorom $\vec{b}^0(s_0)$, pa *vektorska jednadžba binormale* glasi:

$$\vec{r}=\vec{r}_0+\mu_2\vec{b}(s_0),$$

odnosno:

$$\vec{r}=\vec{r}_0+\mu(\vec{r}_0'\times\vec{r}_0''),\qquad(\mu=\mu_1\mu_2),$$

a njene skalarne jednadžbe (kanonski oblik jednadžbe):

$$\frac{x-x_0}{\begin{vmatrix}y_0'&z_0'\\ y_0''&z_0''\end{vmatrix}}=\frac{y-y_0}{\begin{vmatrix}z_0'&x_0'\\ z_0''&x_0''\end{vmatrix}}=\frac{z-z_0}{\begin{vmatrix}x_0'&y_0'\\ x_0''&y_0''\end{vmatrix}}.$$

Binormala je u točki $\alpha(s_0)$ krivulje α kolinearna s vektorom normale na oskulacionu ravninu, pa *vektorska jednadžba oskulacione* ravnine glasi:

$$(\vec{r}-\vec{r}_0)\cdot(\vec{r}_0'\times\vec{r}_0'')=0,$$

odnosno:

$$(\vec{r}-\vec{r}_0,\ \vec{r}_0',\ \vec{r}_0'')=0,$$

a njena skalarna jednadžba:

$$\begin{vmatrix}x-x_0&y-y_0&z-z_0\\ x_0'&y_0'&z_0'\\ x_0''&y_0''&z_0''\end{vmatrix}=0.$$

2° Dokažimo formule iz tablice 3.

Krivulja α je sada dana jednadžbom:

$$\vec{r}=\vec{r}(t).$$

Vektorsku funkciju $\vec{r}=\vec{r}(t)$ reparametrizirajmo duljinom luka funkcijom:

$$t=t(s).$$

Vektor tangente $\vec{t}^0(s)$ dobijemo deriviranjem jednadžbe:

$$\vec{r}=\vec{r}(t(s))$$

po s:

$$\vec{t}^0(s)=\frac{d\vec{r}}{ds}=\frac{d\vec{r}}{dt}\,\frac{dt}{ds}.\tag{5}$$

Odavde proizlazi da su vektori

$$\frac{d\vec{r}}{ds}\ \text{i}\ \frac{d\vec{r}}{dt}$$

kolinearni i istog smjera, jer je prema § 3:

$$\frac{dt}{ds}=\frac{1}{\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|}>0.$$

Vektor tangente je dakle:

$$\vec{t}^0(t)=\frac{\frac{d\vec{r}}{dt}}{\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|}=\frac{\dot{\vec{r}}}{|\dot{\vec{r}}|}.\tag{6}$$

Vektor binormale dobijemo deriviranjem po s jednadžbe (5):

$$\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}=\frac{d}{ds}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\,\frac{dt}{ds}\right)=\frac{d}{ds}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)\frac{dt}{ds}+\frac{d\vec{r}}{dt}\,\frac{d^2t}{ds^2},$$

$$\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}=\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\left(\frac{dt}{ds}\right)^2+\frac{d\vec{r}}{dt}\,\frac{d^2t}{ds^2}.\tag{7}$$

iz (5) i (7) proizlazi:

$$\frac{d^2\vec r}{dt^2}\left(\frac{dt}{ds}\right)^2=\frac{d^2\vec r}{ds^2}-\frac{d^2t}{ds^2}\,\frac{ds}{dt}\,\frac{d\vec r}{ds}. \tag{8}$$

Odavde zaključujemo da vektori $\frac{d\vec r}{dt}$ i $\frac{d^2\vec r}{dt^2}$ razapinju oskulacionu ravninu, jer je (8) linearna kombinacija vektora tangente $\frac{d\vec r}{ds}$ i vektora glavne normale $\frac{\frac{d^2\vec r}{ds^2}}{\left|\frac{d^2\vec r}{ds^2}\right|}$, odnosno vektora $\frac{d\vec r}{ds^2}$ i $\frac{d^2\vec r}{ds^2}$. Kako ti vektori razapinju oskulacionu ravninu, to u njoj leže vektori $\frac{d^2\vec r}{dt^2}$ i $\frac{d\vec r}{dt}$.

Dakle, *vektor binormale* jest:

$$\vec b^0(t)=\frac{\frac{d\vec r}{dt}\times\frac{d^2\vec r}{dt^2}}{\left|\frac{d\vec r}{dt}\times\frac{d^2\vec r}{dt^2}\right|}=\frac{\dot{\vec r}\times\ddot{\vec r}}{|\dot{\vec r}\times\ddot{\vec r}|}. \tag{9}$$

Vektor glavne normale je očito:

$$\vec n^0(t)=\vec b^0(t)\times\vec t^0(t). \tag{10}$$

Neka je, dakle, zadana krivulja $\alpha: J\to E^3$ svojom vektorskom jednadžbom:

$$\vec r=\vec r(t)=x(t)\,\vec i+y(t)\,\vec j+z(t)\,\vec k.$$

U točki $\alpha(t_0)$, $t_0\in J$ krivulje dan je:

vektor tangente:

$$\vec t^0(t_0)=\frac{\dot{\vec r}_0}{|\dot{\vec r}_0|}=\frac{1}{|\dot{\vec r}|}(\dot x_0\vec i+\dot y_0\vec j+\dot z_0\vec k), \tag{11}$$

vektor binormale:

$$\vec b^0(t_0)=\frac{\dot{\vec r}_0\times\ddot{\vec r}_0}{|\dot{\vec r}_0\times\ddot{\vec r}_0|}=\frac{1}{|\dot{\vec r}_0\times\ddot{\vec r}_0|}\begin{vmatrix}\vec i&\vec j&\vec k\\ \dot x_0&\dot y_0&\dot z_0\\ \ddot x_0&\ddot y_0&\ddot z_0\end{vmatrix}, \tag{12}$$

$$\vec b^0(t)=\frac{1}{|\dot{\vec r}_0\times\ddot{\vec r}_0|}(l\vec i+m\vec j+n\vec k),$$

gdje je:

$$l=\begin{vmatrix}\dot y_0&\dot z_0\\ \ddot y_0&\ddot z_0\end{vmatrix},\quad m=\begin{vmatrix}\dot z_0&\dot x_0\\ \ddot z_0&\ddot x_0\end{vmatrix},\quad n=\begin{vmatrix}\dot x_0&\dot y_0\\ \ddot x_0&\ddot y_0\end{vmatrix}, \tag{13}$$

i vektor glavne normale, kojeg u koordinatama dobijemo ovako:

$$\vec n^0(t_0)=\vec b^0(t_0)\times\vec t^0(t_0)=\frac{\dot{\vec r}_0\times\ddot{\vec r}_0}{|\dot{\vec r}_0\times\ddot{\vec r}_0|}\times\frac{\dot{\vec r}_0}{|\dot{\vec r}_0|}, \tag{14}$$

$$\vec n^0(t_0)=\mu_1\left[(\dot{\vec r}_0\times\ddot{\vec r}_0)\times\dot{\vec r}_0\right],\quad\left(\mu_1=\frac{1}{|\dot{\vec r}_0|\,|\dot{\vec r}_0\times\ddot{\vec r}_0|}\right).$$

Izračunajmo $(\dot{\vec r}\times\ddot{\vec r})\times\dot{\vec r}=\dot{\vec r}^2\ddot{\vec r}-\dot{\vec r}(\dot{\vec r}\cdot\ddot{\vec r})$ u koordinatama. Kako je:

$$\dot{\vec r}^2\ddot{\vec r}=(\dot x^2+\dot y^2+\dot z^2)\quad(\ddot x\vec i+\ddot y\vec j+\ddot z\vec k)$$
$$(\dot{\vec r}\cdot\ddot{\vec r})\dot{\vec r}=(\dot x\ddot x+\dot y\ddot y+\dot z\ddot z)\quad(\dot x\vec i+\dot y\vec j+\dot z\vec k),$$

to je:

$$\begin{aligned}(\dot{\vec r}\times\ddot{\vec r})\times\dot{\vec r}=&\left[(\dot x^2+\dot y^2+\dot z^2)\,\ddot x-(\dot x\ddot x+\dot y\ddot y+\dot z\ddot z)\,\dot x\right]\vec i+\\&+\left[(\dot x^2+\dot y^2+\dot z^2)\,\ddot y-(\dot x\ddot x+\dot y\ddot y+\dot z\ddot z)\,\dot y\right]\vec j+\\&+\left[(\dot x^2+\dot y^2+\dot z^2)\,\ddot z-(\dot x\ddot x+\dot y\ddot y+\dot z\ddot z)\,\dot z\right]\vec k,\end{aligned}$$

$$(\dot{\vec r}\times\ddot{\vec r})\times\dot{\vec r}=-\begin{vmatrix}\dot y&\dot z\\ m&n\end{vmatrix}\vec i-\begin{vmatrix}\dot z&\dot x\\ n&l\end{vmatrix}\vec j-\begin{vmatrix}\dot x&\dot y\\ l&m\end{vmatrix}\vec k=$$

$$=-\begin{vmatrix}\vec i&\vec j&\vec k\\ \dot x&\dot y&\dot z\\ l&m&n\end{vmatrix}, \tag{15}$$

uz oznake (13).

Vektorske jednadžbe *tangente, glavne normale* i *binormale* u točki $\alpha(t_0)$ krivulje α očito glase:

$$\begin{aligned}\vec r&=\vec r_0+\mu\,\dot{\vec r}_0,\\ \vec r&=\vec r_0+\mu\left[(\dot{\vec r}_0\times\ddot{\vec r}_0)\times\dot{\vec r}_0\right],\\ \vec r&=\vec r_0+\mu\left[\dot{\vec r}_0\times\ddot{\vec r}_0\right],\end{aligned} \tag{16}$$

dok njihove skalarne jednadžbe proizlaze iz (16), (11), (12) i (15) uz oznake (13) i glase kao u Tablici 3. Vektorske i skalarne jednadžbe normalne, rektifikacione i oskulacione ravnine također se lako izvode kao u slučaju iz Tablice 2.

90. Naći one tangente krivulje $\alpha:\mathbf{R}\to E^3$ dane sa:

$\vec r=\{t,\ t^2,\ t^3\}$,

koje su paralelne s ravninom $x+2y+z-3=0$.

Vektor smjera tangente jest:

$\dot{\vec r}=\{1,\ 2t,\ 3t^2\}$.

Treba naći dirалište tangenti i krivulje α. To će biti točka u kojima je vektor tangente okomit na vektor normale $\vec N=\{1,\ 2,\ 1\}$ zadane ravnine, tj. kada je $\dot{\vec r}\cdot\vec N=0$. To daje uvjet:

$$3t^2+4t+1=0.$$

Rješenja su $t_1 = -\frac{1}{3}$, $t_2 = -1$, a dirališta:

$$D_1 = \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{27}\right), \quad D_2 = (-1, 1, -1).$$

Tangente prema tome imaju jednadžbe:

$$\frac{x+\frac{1}{3}}{1} = \frac{y-\frac{1}{9}}{-\frac{2}{3}} = \frac{z+\frac{1}{27}}{\frac{3}{9}},$$

$$\frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+1}{3},$$

odnosno:

$$\frac{3x+1}{1} = \frac{9y-1}{-2} = \frac{27z+1}{3},$$

$$\frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+1}{3},$$

91. Dokazati da tangente krivulje $\alpha:\mathbf{R}\to E^3$ dane sa:

$$x = a(\sin t+\cos t)$$
$$y = a(\sin t-\cos t)$$
$$z = b\mathrm{e}^{-t}$$

sijeku ravninu XOY u kružnici $x^2+y^2=4a^2$.

Kanonski oblik jednadžbe tangente glasi:

$$\frac{x-a(\sin t+\cos t)}{a(\cos t-\sin t)} = \frac{y-a(\sin t-\cos t)}{a(\cos t+\sin t)} = \frac{z-b\mathrm{e}^{-t}}{-b\mathrm{e}^{-t}},$$

a u parametarskom obliku:

$x = a(\cos t-\sin t)\,\lambda + a(\sin t+\cos t)$,

$y = a(\cos t+\sin t)\,\lambda + a(\sin t-\cos t)$, $\quad z = -be^{-t}\,\lambda + be^{-t}$.

Sjecišta tangenata s ravninom XOY dobivamo za one λ za koje je $z=0$, tj. za $\lambda=1$, dakle:

$$x = 2a\cos t,$$
$$y = 2a\sin t.$$

a to su parametarske jednadžbe kružnice $x^2+y^2=4a^2$.

92. Naći normalnu ravninu krivulje:

$$z = x^2+y^2$$
$$y = x$$

u točki $x=1$.

Parametarske jednadžbe krivulje glase ako uzmemo za parametar apscisu x:

$$\vec{r} = \{x,\ x,\ 2x^2\}.$$

Vektor normale na normalnu ravninu ima smjer:

$$\dot{\vec{r}} = \{1,\ 1,\ 4x\},$$

pa jednadžba normalne ravnine glasi:

$$(X-x)+(Y-x)+4x(Z-2x^2) = 0,$$

a u traženoj točki $T=(1, 1, 2)$:

$$(X-1)+(Y-1)+4(Z-2) = 0,$$

odnosno:

$$X+Y+4Z-10 = 0.$$

93. Naći jednadžbu binormale krivulje $\alpha:\mathbf{R}\to E^3$:

$$x = t-\sin t, \quad y = 1-\cos t, \quad z = 4\cos\frac{t}{2} \text{ u točki } t=\pi.$$

Smjer binormale određen je vektorom:

$$\dot{\vec{r}}\times\ddot{\vec{r}} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1-\cos t & \sin t & -2\sin\frac{t}{2} \\ \sin t & \cos t & -\cos\frac{t}{2} \end{vmatrix} = -2\sin^2\frac{t}{2}\left(\sin\frac{t}{2}\vec{i}+\cos\frac{t}{2}\vec{j}+\vec{k}\right),$$

pa jednadžba glasi:

$$\frac{x-(t-\sin t)}{\sin\frac{t}{2}} = \frac{y-(1-\cos t)}{\cos\frac{t}{2}} = \frac{z-4\cos\frac{t}{2}}{1},$$

a u točki $T=(\pi, 2, 0)$:

$$\frac{x-\pi}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z}{1}.$$

94. Naći oskulacionu ravninu krivulje:

$$y^2 = x, \quad x^2 = z, \text{ u točki } T=(1, 1, 1).$$

Parametarske jednadžbe krivulje jesu:

$$x = t^2, \quad y = t, \quad z = t^4,$$

a oskulaciona ravnina ima jednadžbu:

$$\begin{vmatrix} x-t^2 & y-t & z-t^4 \\ 2t & 1 & 4t^3 \\ 2 & 0 & 12t^2 \end{vmatrix} = 0,$$

odnosno:

$$12t^2x - 16t^3y - 2z + 6t^4 = 0.$$

Odavde za $t = 1$ dobivamo

$$6x - 8y - z + 3 = 0.$$

95. Napisati jednadžbu rektifikacione ravnine krivulje $\alpha : (0, \pi) \to E^3$:

$$\vec{r} = \left\{ \frac{t}{\sqrt{2}}, \frac{t}{\sqrt{2}}, \ln \sin t \right\} \quad \text{u točki} \quad t = \frac{\pi}{2}.$$

Vektor normale $\vec{n}$ rektifikacione ravnine je kolinearan s vektorom $(\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}) \times \dot{\vec{r}}$.

Imamo:

$$\dot{\vec{r}} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\cos t}{\sin t} \right\},$$

$$\ddot{\vec{r}} = \left\{ 0,\ 0,\ -\frac{1}{\sin^2 t} \right\},$$

$$(\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}) \times \dot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}(\dot{\vec{r}}^2) - \dot{\vec{r}}(\dot{\vec{r}} \cdot \ddot{\vec{r}}),$$

$$\dot{\vec{r}}^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \operatorname{ctg}^2 t = 1 + \operatorname{ctg}^2 t = \frac{1}{\sin^2 t},$$

$$\dot{\vec{r}} \cdot \ddot{\vec{r}} = -\frac{\operatorname{ctg} t}{\sin^2 t}.$$

Tada je:

$$(\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}) \times \dot{\vec{r}} = \frac{1}{\sin^2 t}\left(-\frac{1}{\sin^2 t}\vec{k} \right) + \frac{\operatorname{ctg} t}{\sin^2 t}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j} + \operatorname{ctg} t\,\vec{k} \right) =$$

$$= \frac{1}{\sin^2 t}\left(\frac{\operatorname{ctg} t}{\sqrt{2}}\vec{i} + \frac{\operatorname{ctg} t}{\sqrt{2}}\vec{j} - \vec{k} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}\sin^2 t}(\operatorname{ctg} t\,\vec{i} + \operatorname{ctg} t\,\vec{j} - \sqrt{2}\,\vec{k}).$$

Jednadžba rektifikacione ravnine glasi:

$$\operatorname{ctg} t\left(X - \frac{t}{\sqrt{2}} \right) + \operatorname{ctg} t\left(Y - \frac{t}{\sqrt{2}} \right) - \sqrt{2}(Z - \ln \sin t) = 0.$$

Jednadžba rektifikacione ravnine u točki $t = \dfrac{\pi}{2}$ glasi:

$$Z = 0.$$

96. Odrediti funkciju $\phi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ tako da glavna normala krivulje $\alpha : \mathbf{R} \to E^3$:

$$\vec{r} = \{ t,\ \sin t,\ \phi(t) \}$$

bude paralelna s YOZ ravninom.

Imamo:

$$\dot{\vec{r}} = \{ 1,\ \cos t,\ \dot{\phi} \},$$

$$\ddot{\vec{r}} = \{ 0,\ -\sin t,\ \ddot{\phi} \}.$$

Vektor glavne normale ima smjer:

$$(\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}) \times \dot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}(\dot{\vec{r}}^2) - \dot{\vec{r}}(\ddot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}}),$$

$$\dot{\vec{r}}^2 = 1 + \cos^2 t + \dot{\phi}^2,$$

$$\dot{\vec{r}}\ddot{\vec{r}} = -\sin t \cos t + \dot{\phi}\ddot{\phi},$$

$$(\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}) \times \dot{\vec{r}} = (1 + \cos^2 t + \dot{\phi}^2)\,(-\sin t\,\vec{j} + \ddot{\phi}\vec{k}) -$$

$$- (-\sin t \cos t + \dot{\phi}\ddot{\phi})\,(\vec{i} + \cos t\,\vec{j} + \dot{\phi}\vec{k}).$$

Da bi glavna normala bila paralelna s YOZ ravninom, mora koordinata uz $\vec{i}$ biti jednaka nuli, dakle:

$$-\sin t \cos t + \dot{\phi}\ddot{\phi} = 0.$$

Riješimo ovu diferencijalnu jednadžbu:

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}\dot{\phi}^2}{\mathrm{d}t} = \sin t \cos t,$$

$$\dot{\phi}^2 = \sin^2 t + c^2,$$

$$\dot{\phi} = \sqrt{\sin^2 t + c^2} = c\sqrt{1 + \left(\frac{\sin t}{c} \right)^2} = \sqrt{c^2 + 1 - \cos^2 t},$$

$$\phi(t) = K_1\left[\int \sqrt{1 - \left(\frac{\cos t}{K_1} \right)^2}\,\mathrm{d}t + K_2 \right], \text{ gdje je } K_1 = \sqrt{c^2 + 1}$$

$$c = \text{konst.}$$

(ili uzeti supstituciju $\dot{\phi} = z$, $\ddot{\phi} = \dot{z}$).

97. Napisati jednadžbu tangente, glavne normale i binormale za kružnu zavojnicu $\alpha : \mathbf{R} \to E^3$:

$$\vec{r} = \{ a\cos t,\ a\sin t,\ bt \}$$

u proizvoljnoj točki.

Dokazati da glavna normala siječe os zavojnice pod pravim kutom, a binormala zatvara s tom osi konstantan kut.

Prvi način:

Jednadžbe tangente, glavne normale, odnosno binormale glase u vektorskom obliku:

$$\vec{\varrho} = \vec{r}(t) + \mu[\dot{\vec{r}}(t)],$$

$$\vec{\varrho} = \vec{r}(t) + \mu[(\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}) \times \dot{\vec{r}}], \text{ odnosno}$$

$$\vec{\varrho} = \vec{r}(t) + \mu[\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}].$$

Računajmo:

$$\dot{\vec{r}}(t) = \{ -a\sin t,\ a\cos t,\ b \},$$

$$\ddot{\vec{r}}(t) = \{ -a\cos t,\ -a\sin t,\ 0 \},$$

$$|\dot{\vec r}|^2 = a^2 + b^2,$$
$$|\dot{\vec r}| = \sqrt{a^2+b^2}$$
$$(\dot{\vec r}\times\ddot{\vec r})\times\dot{\vec r} = \ddot{\vec r}\cdot\dot{\vec r}^2 - \dot{\vec r}(\ddot{\vec r}\cdot\dot{\vec r}).$$

Jer je $|\dot{\vec r}| = \sqrt{a^2+b^2}$ = konst., to je vektor $\dot{\vec r}$ okomit na svojoj derivaciji, tj. $\dot{\vec r}\perp\ddot{\vec r}$, pa je $\ddot{\vec r}\cdot\dot{\vec r} = 0$. Zbog toga je smjer glavne normale:

$$(\dot{\vec r}\times\ddot{\vec r})\times\dot{\vec r} = \dot{\vec r}^2\cdot\ddot{\vec r} = -a(a^2+b^2)\,[\cos t\,\vec i + \sin t\,\vec j\,].$$

Nadalje, binormala ima smjer:

$$\dot{\vec r}\times\ddot{\vec r} = \begin{vmatrix} \vec i & \vec j & \vec k \\ -a\sin t & a\cos t & b \\ -a\cos t & -a\sin t & 0 \end{vmatrix} = ab\sin t\,\vec i - ab\cos t\,\vec j + a^2\vec k$$

$$\dot{\vec r}\times\ddot{\vec r} = a\,[\,b\sin t\,\vec i - b\cos t\,\vec j + a\,\vec k\,].$$

Jednadžba tangente je prema tome:

$$\frac{X-a\cos t}{-a\sin t} = \frac{Y-a\sin t}{a\cos t} = \frac{Z-bt}{b}.$$

Jednadžba glavne normale:

$$\frac{X-a\cos t}{-a(a^2+b^2)\cos t} = \frac{Y-a\sin t}{-a(a^2+b^2)\sin t} = \frac{Z-bt}{0}, \text{ odnosno}$$

$$\frac{X-a\cos t}{\cos t} = \frac{Y-a\sin t}{\sin t} = \frac{Z-bt}{0},$$

dok jednadžba binormale glasi:

$$\frac{X-a\cos t}{ab\sin t} = \frac{Y-a\sin t}{-ab\cos t} = \frac{Z-bt}{a^2}, \text{ odnosno:}$$

$$\frac{X-a\cos t}{b\sin t} = \frac{Y-a\sin t}{-b\cos t} = \frac{Z-bt}{a}.$$

Nađimo kut između glavne normale i osi zavojnice, tj. kut između vektora:

$$\vec n = \{\cos t,\ \sin t,\ 0\} \quad \text{i} \quad \vec k = \{0,\ 0,\ 1\}:$$

$$\cos\phi = 0, \quad \text{pa je } \phi = \frac{\pi}{2}.$$

Kut između binormale i osi zavojnice jest kut između vektora:

$$\vec b = \{b\sin t,\ -b\cos t,\ a\} \ \text{i}\ \vec k = \{0, 0, 1\}:$$

$$\cos\phi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \text{const.}$$

Drugi način:

Jednostavnije se zadatak rješava reparametrizacijom duljinom luka. Prema zad. 62. kružna zavojnica α ima jednadžbu

$$\left(t = t(s) = \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right):$$

$$\vec r = \vec r(s) = \left\{a\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\ a\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \frac{bs}{\sqrt{a^2+b^2}}\right\}.$$

Kako je:

$$\vec r\,'(s) = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\left[-a\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\,\vec i + a\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\,\vec j + b\vec k\right],$$

$$\vec r\,''(s) = \frac{a}{a^2+b^2}\left[-\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\,\vec i - \sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\,\vec j + 0\vec k\right],$$

$$\vec r\,'(s)\times\vec r\,''(s) = \frac{1}{(a^2+b^2)^{3/2}}\left[b\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\,\vec i - b\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\,\vec j + a\vec k\right],$$

to prema Tablici 1. na str. 42. i uz $t = \dfrac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}$ za jednadžbe tangente, glavne normale i binormale dobivaju se već poznate jednadžbe.

98. Naći jednadžbe tangente, glavne normale, binormale, normalne, rektifikacione i oskulacione ravnine krivulje (vidi zad. 179):

$$x^2 - y^2 + z^2 - 1 = 0$$
$$y^2 - 2x + z = 0,$$

u točki $T = (1,\ 1,\ 1)$.

Napišimo na zadanu krivulju parametarske (ili vektorsku) jednadžbe:

Budući da je projekcija grafa krivulje na XOZ ravninu kružnica:

$$x^2 + z^2 - 2x + z = 1, \quad \text{odnosno:}$$

$$(x-1)^2 + \left(z + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4},$$

to uvedimo parametar ϕ ovako:

$$x = 1 + \frac{3}{2}\cos\phi,$$

$$z = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\sin\phi,$$

pa je tada:

$$y = \pm\sqrt{\frac{5}{2} + 3\cos\phi - \frac{3}{2}\sin\phi}.$$

U ovom obliku je (zbog komponente y) nespretno računati derivacije krivulje. Zbog toga ćemo uzeti za parametar apscisu x, pa će krivulja imati vektorsku jednadžbu:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y(x)\vec{j} + z(x)\vec{k}.$$

Komponente y i z su ovdje funkcije od x, koje ćemo, kao i njene derivacije, naći iz zadane krivulje na sljedeći način:

Uvijek je: $x = x, \quad \dot{x} = 1, \quad \ddot{x} = 0, \quad \dddot{x} = 0, \ \ldots$

Nađimo prvu derivaciju krivulje, tj. $\dot{\vec{r}}$:

$$2x - 2y\dot{y} + 2z\dot{z} = 0,$$
$$2y\dot{y} - 2 + \dot{z} = 0.$$

U točki T ovaj sustav jednadžbi glasi:

$$1 - \dot{y} + \dot{z} = 0,$$
$$2 - 2 + \dot{z} = 0,$$

odakle dobivamo: $\dot{z} = 0$, $\dot{y} = 1$, pa je prva derivacija u točki T:

$$\dot{\vec{r}}_T = \vec{i} + \vec{j}.$$

Druga derivacija dobije se iz:

$$1 - \dot{y}^2 - y\ddot{y} + \dot{z}^2 + z\ddot{z} = 0,$$
$$2\dot{y}^2 + 2y\ddot{y} + \ddot{z} = 0,$$

u točki T:

$$1 - 1 - \ddot{y} + \ddot{z} = 0,$$
$$2 + 2\ddot{y} + \ddot{z} = 0,$$

odakle je $\ddot{y} = -\dfrac{2}{3}$, $\ddot{z} = -\dfrac{2}{3}$, pa je:

$$\ddot{\vec{r}}_T = -\frac{2}{3}\vec{j} - \frac{2}{3}\vec{k}.$$

Treća derivacija se dobije ponovnim deriviranjem malo prije dobivenog sustava:

$$-3\dot{y}\ddot{y} - y\dddot{y} + 3\dot{z}\ddot{z} + z\dddot{z} = 0,$$
$$6\dot{y}\ddot{y} + 2y\dddot{y} + \dddot{z} = 0,$$

u točki T:

$$2 - \dddot{y} + z\dddot{z} = 0,$$
$$-4 + 2y\dddot{y} + \dddot{z} = 0,$$

odakle je $\dddot{y} = 2$, $\dddot{z} = 0$, pa je:

$$\dddot{\vec{r}} = 2\vec{j}.$$

Tada je jednadžba tangente:

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{0}.$$

Izračunajmo smjer glavne normale:

$$\ddot{\vec{r}}(\dot{\vec{r}}^2) - \dot{\vec{r}}(\dot{\vec{r}}\cdot\ddot{\vec{r}}) = 2\left[-\frac{2}{3}\vec{j} - \frac{2}{3}\vec{k}\right] + \frac{2}{3}[\vec{i} + \vec{j}] = \frac{2}{3}(\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}),$$

pa glavna normala ima jednadžbu:

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{-2}.$$

Smjer binormale određen je vektorom:

$$\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{vmatrix} = \frac{2}{3}(\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}),$$

a binormala ima jednadžbu:

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{1}.$$

Normalna ravnina ima jednadžbu:

$$1(x-1) + 1(y-1) = 0,$$

odnosno:

$$x + y - 2 = 0,$$

oskulaciona ravnina:

$$-\frac{2}{3}(x-1) + \frac{2}{3}(y-1) - \frac{2}{3}(z-1) = 0,$$

odnosno:

$$x - y + z - 1 = 0,$$

a rektifikaciona ravnina:

$$\frac{2}{3}(x-1) - \frac{2}{3}(y-1) - \frac{4}{3}(z-1) = 0,$$

odnosno:

$$x - y - 2z + 2 = 0.$$

99. Naći trobrid pratilac za heliks (zavojnicu) $\alpha : \mathbf{R} \to E^3$:

$$x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ z = bt.$$

Prema zadatku 97. imamo ort tangente, glavne normale i binormale:

$$\vec{t}^{\circ} = \frac{\vec{t}}{|\vec{t}|} = \frac{\dot{\vec{r}}}{|\vec{t}|} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}(-a\sin t\,\vec{i} + a\cos t\,\vec{j} + b\vec{k}),$$

$$\vec{n}^\circ = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = -\frac{a(a^2+b^2)}{a(a^2+b^2)}(\cos t\,\vec{i}+\sin t\,\vec{j}) = -(\cos t\,\vec{i}+\sin t\,\vec{j}),$$

$$\vec{b}^\circ = \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{a}{a\sqrt{a^2+b^2}}(b\sin t\,\vec{i}-b\cos t\,\vec{j}+a\vec{k}) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(b\sin t\,\vec{i}-b\cos t\,\vec{j}+a\vec{k}).$$

Normalna ravnina ima jednadžbu:

$$-a\sin t\,\mathrm{X}+a\cos t\,\mathrm{Y}+b\,\mathrm{Z}-b^2t=0,$$

binormalna:

$$\cos t\,\mathrm{X}+\sin t\,\mathrm{Y}-a=0,$$

a oskulaciona:

$$b\sin t\,\mathrm{X}-b\cos t\,\mathrm{Y}+a\,\mathrm{Z}-\mathrm{ab}\,t=0.$$

Uočimo da je radijvektor projekcije neke točke zavojnice na ravninu XOY, tj. vektor $\vec{r}=\{a\cos t,\ a\sin t,\ 0\}$ suprotne orijentacije s vektorom $\vec{n}^\circ$. Vektor $\vec{n}^\circ$ ima, dakle, orijentaciju prema osi zavojnice i prema zad. 97. zatvara s njom pravi kut (vidi zad. 54, 58, 62, 97, 163, 197).

100. Zadana je krivulja $\alpha:\mathbf{R}\to E^3$:

$$\vec{r}=\{a\cos t,\ a\sin t,\ af(t)\},$$

gdje je $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ dvaput diferencijalna funkcija.

Odrediti $f(t)$ tako da oskulaciona ravnina krivulje α zatvara konstantan kut sa osi Z.

Normalni vektor oskulacione ravnine ima smjer određen vcektorom:

$$\dot{\vec{r}}\times\ddot{\vec{r}} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -a\sin t & -a\cos t & a\dot{f} \\ -a\cos t & -a\sin t & a\ddot{f} \end{vmatrix} =$$

$$= a^2(\ddot{f}\cos t+\dot{f}\sin t)\,\vec{i}+a^2(\ddot{f}\sin t-\dot{f}\cos t)\,\vec{j}+a^2\vec{k}.$$

Neka je α kut što ga normalni vektor oskulacione ravnine zatvara s osi Z, tada je

$$\cos\alpha = \frac{\vec{N}\cdot\vec{k}}{|\vec{N}|\ |\vec{k}|} = \frac{(\dot{\vec{r}}\times\ddot{\vec{r}})\cdot\vec{k}}{|\dot{\vec{r}}\times\ddot{\vec{r}}|} =$$

$$= \frac{a^2}{a^2\sqrt{\ddot{f}^2+\dot{f}+1}} = \frac{1}{\sqrt{\ddot{f}^2+\dot{f}^2+1}}.$$

Riješimo diferencijalnu jednadžbu:

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{f''^2+f'^2+1}}.$$

Dalje je:

$$\frac{1}{\cos^2\alpha} = f''^2+f'^2+1,$$

$$\frac{1-\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = f''^2+f'^2,$$

$$\mathrm{tg}^2\alpha = f''^2+f'^2. \tag{1}$$

Uzmimo supstituciju: $f'=u,\ f''=u'$ i označimo $\mathrm{tg}^2\alpha=k^2$, dolazimo do diferencijalne jednadžbe:

$$u'^2+u^2=k^2 \tag{2}$$

$$u' = \pm\sqrt{k^2-u^2},$$

$$\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{k^2-u^2}} = \pm\,\mathrm{d}t,\quad \text{ako je } k^2-u^2\neq 0.$$

$$\arcsin\frac{u}{k} = c_1\pm t,$$

$$u = k\sin(c_1\pm t),$$

$$f(t) = k\cos(c_1\pm t)+c_2,$$

$$f(t) = c_2+\mathrm{tg}\,\alpha\cos(c_1\pm t).$$

Singularno rješenje diferencijalne jednadžbe (2) dobijemo ako je:

$$k^2-u^2=0.$$

Tada je:

$$u = \pm k,$$

što zadovoljava jednadžbu (2).

Nadalje je:

$$\mathrm{u}=f' = \pm k,$$

odnosno:

$$f(t) = C_3\pm kt,$$

pa je to singularno rješenje.

Specijalno, za $C_3=0,\ \pm k=b$, imamo:

$$f(t)=bt,$$

što predstavlja kružnu zavojnicu (vidi zad. 54).

U zadacima 101–105. naći jednadžbu tangente krivulja:

101. $x^2+y^2=10,\ y^2+z^2=25$ u točki $T=(1,3,4)$.
102. $2x^2+3y^2+z^2=47,\ x^2+2y^2=z$ u točki $T=(-2,1,6)$.
103. $xy^2+z^3=12,\ x+y+2z-7=0$ u točki $T=(1,2,2)$.
104. $3x^2+2y^2+y^4-z=0,\ x^2-y^2+z^2-36=0$ u točki $M=(-1,1,6)$.
105. $x=e^t\cos t,\ y=e^t\sin t,\ z=e^t$ za $t=0$.

106. Napisati jednadžbu tangente na krivulju:

$$\alpha:\mathbf{R}\to E^3:$$

$$x=a(t-\sin t),\quad y=a(1-\cos t),\quad z=4a\sin\frac{t}{2}$$

u točki $t=0$. Naći kut što ga tangenta zatvara s osi OZ.

107. U kojim je točkama tangenta na krivulju $\alpha:\mathbf{R}\to E^3$:

$$x=3t-t^3,\quad y=3t^2,\quad z=3t+t^3$$

paralelna s ravninom:

$$3x+y+z+2=0?$$

108. Napisati jednadžbu tangente na krivulju $\alpha:\mathbf{R}\to E^3$:

$$\vec{r}=\{a\operatorname{ch}t,\ a\operatorname{sh}t,\ ct\}$$

u proizvoljnoj točki.

109. Pokazati da tangenta krivulje $\alpha:\mathbf{R}\to E^3$:

$$\vec{r}=\left\{t,\ \frac{t^2}{3},\ \frac{2t^3}{27}\right\}$$

zatvara konstantan kut s vektorom
$\vec{a}=\{1,\ 0,\ 1\}$. Koliki je taj kut?

110. U kojim točkama je tangenta krivulje $\alpha:\mathbf{R}\to E^3$:

$$\vec{r}=\{3t-t^3,\ 3t^2,\ 3t+t^3\}$$

paralelna s koordinatnim ravninama?

111. Napisati jednadžbu tangente krivulje $\alpha:\mathbf{R}\to E^3$:

$$\vec{r}=\{a\cos t,\ -a\sin t,\ b\,\mathrm{e}^t\}$$

i naći geometrijsko mjesto sjecišta tangenata i ravnine XOY.

112. Napisati jednadžbu tangente i normalne ravnine zavojnice $\alpha:\mathbf{R}\to E^3$:

$$\vec{r}=\{2\cos t,\ 2\sin t,\ 4t\}$$

u točki $t=0$.

113. Zadana je krivulja $\alpha:\mathbf{R}\to E^3$:

$$\vec{r}=\{t,\ t^2,\ t^3\}.$$

Koja krivulja se dobije kao presjek tangenata krivulje α s ravninom XOY?

114. Napisati jednadžbu tangente i normalne ravnine Vivijanieve krivulje (vidi zad. 55).

115. Dokazati da je udaljenost između neke točke $\vec{r}(t)$ na zavojnici $\alpha:\mathbf{R}\to E^3$:

$$\vec{r}=\{a\cos t,\ a\sin t,\ bt\}$$

i sjecišta tangente u toj točki s ravninom XOY jednako $k\,|t|$, gdje je k neka konstanta.

116. Pokazati da je kut između tangente krivulje $\alpha:\mathbf{R}\to E^3$:

$$\vec{r}=\left\{\cos^2 t,\ \frac{1}{2}\sin 2t,\ \sin t\right\},$$

i radijvektora dirališta konstantan.

117. Dana je krivulja $\alpha:\mathbf{R}\to E^3$:

$$\vec{r}=\{x,\ \phi_1(x),\ \phi_2(x)\},$$

gdje su $\phi_1,\ \phi_2:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$.
Ako postoje $\phi'_1(x_0)$ i $\phi'_2(x_0)$ pokazati da krivulja ne može imati za $x=x_0$ tangentu okomitu na os OX.

118. Za krivulju $\alpha:I\to E^3$ zadanu sa $\vec{r}=\vec{r}(s)$ (s je duljina luka) definira se *sferna indikatrisa tangenata* kao krivulja $\beta:I\to E^3$ koja je dana jednadžbom:

$$\vec{R}(s)=\frac{d\vec{r}}{ds}=\vec{t}(s).$$

Očito graf od β leži na jediničnoj sferi sa središtem u ishodištu.
Naći jednadžbu sferne indikatrise tangenata obične zavojnice.

119. Napisati jednadžbu tangente i normalne ravnine krivulje koja je zadana kao presjek dviju ploha:

$$F(x,\ y,\ z)=0,\qquad \Phi(x,\ y,\ z)=0.$$

120. Napisati jednadžbu tangente i normalne ravnine krivulje:

$$x^2=2az,\ y^2=2bz$$

u proizvoljnoj točki.

121. Naći jednadžbu normalne ravnine u proizvoljnoj točki krivulje:

$$x^2+y^2-z^2=1,\qquad x^2-y^2-z^2=1.$$

122. Naći jednadžbu normalne ravnine u proizvoljnoj točki krivulje:

$$x^2+y^2=1,\qquad y^2+z^2=1.$$

123. Dokazati da sve normalne ravnine krivulje $\alpha:[0,2\pi]\to E^3$:

$$\vec{r}=\{a\sin^2 t,\ a\sin t\cos t,\ a\cos t\}$$

prolaze istom točkom. Koja je to točka?

124. Napisati jednadžbu oskulacione ravnine krivulje $\alpha:\mathbf{R}\to E^3$:

$$\vec{r}=\{\mathrm{e}^t,\ \mathrm{e}^{-t},\ t\sqrt{2}\}$$

u proizvoljnoj točki krivulje.

125. Naći one oskulacione ravnine krivulje $\alpha:\mathbf{R}\to E^2$:

$$x=t,\ y=t^2,\ z=t^3$$

koje prolaze točkom $M=\left(2,\ -\frac{1}{3},\ -6\right)$.

126. Naći oskulacionu ravninu krivulje $\alpha:[0,\pi]\to E^3$:

$$x=\cos^3 t,\ y=\sin^3 t,\ z=\cos^2 t$$

u njezinoj proizvoljnoj točki.

127. Napisati jednadžbu oskulacione ravnine krivulje $\alpha:\mathbf{R}\to E^3$:

$$\vec{r}=\{t\cos t,\ -t\sin t,\ at\}$$

u ishodištu koordinatnog sustava.

128. Napisati jednadžbu oskulacione ravnine krivulje $\alpha:\mathbf{R}\to E^3$:

$$\vec{r}=\{a\cos t,\ b\sin t,\ e^t\}$$

u točki $t=0$.

129. Pokazati da pravac koji prolazi proizvoljnom točkom M krivulje $\alpha:\mathbf{R}\to E^3$:

$$x=t,\ y=t,\ z=t^3$$

paralelno s ravninom $z=0$ do sjecišta s osi OZ, leži u oskulacionoj ravnini pridruženoj točki M.

130. Napisati jednadžbu oskulacione ravnine krivulje:

$$x^2+y^2+z^2=9, \qquad x^2-y^2=3$$

u točki $M=(2,1,2)$.

131. Naći oskulacionu ravninu krivulje:

$$x^2+y^2+z^2=6, \qquad x+y+z=0$$

u točki $M=(1,1,-2)$.

132. Naći oskulacionu ravninu krivulje:

$$y^2+4z^2+2ax-2a^2=0,$$
$$4x+3y+2z-5a=0.$$

u točki $M=\left(\frac{a}{2},\ \frac{4}{5}a,\ \frac{3}{10}a\right)$.

133. Naći oskulacionu ravninu krivulje:

$$y=\phi(x), \quad z=a\phi(x)+b,$$

(gdje je $\phi:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ bar dva puta diferencijabilna funkcija) u proizvoljnoj točki krivulje.

134. Naći oskulacionu ravninu krivulje:

$$x^2=2az,\ y^2=2bz$$

u proizvoljnoj točki krivulje.

135. Dokazati da graf krivulje $\alpha:\mathbf{R}\to E^3$:

$$x=e^t\cos t,\ y=e^t\sin t,\ z=2t$$

leži na plohi:

$$x^2+y^2-e^z=0$$

i da se njezina oskulaciona ravnina poklapa s tangentnom ravninom plohe.

136. Ako oskulacione ravnine krivulje prolaze fiksnom točkom, dokazati da je krivulja ravninska (vidi zad. 162).

137. Dokazati da svaka oskulaciona ravnina kružne zavojnice siječe kružni valjak na kome se nalazi po elipsi konstantnih poluosi. U zadacima 138–142. naći glavnu normalu i binormalu krivulja $\alpha:\mathbf{R}\to E^3$.

138. $x=t,\ y=t^2,\ z=e^t$ u točki $t=0$.

139. $x=t,\ y=t^2,\ z=t^3$ u točki $t=1$.

140. $x=\frac{t^2}{2},\ y=\frac{2t^3}{3},\ z=\frac{t^4}{2}$, u točki $t=1$.

141. $x=y^2,\ x^2=z$ u točki $M=(1,1,1)$.

142. $xy=z^2,\ x^2+y^2-z^2=1$ u točki $M=(1,1,1)$.

U zadacima 143–145. naći jedinične vektore tangente, glavne normale i binormale u proizvoljnoj točki krivulja α:

143. $x=\cos^3 t,\ y=\sin^3 t,\ z=\cos 2t;\ t\in[0,\pi]$.

144. $x=a(t-\sin t),\ y=a(1-\cos t),\ z=4a\cos\frac{t}{2};\ t\in\mathbf{R}$.

145. $x^3=3a^2y,\ 2xz=a^2$.

146. Naći jedinične vektore trobrida pratioca krivulje $\alpha:\mathbf{R}\to E^3$:

$$\vec{r}=\{e^t\cos t,\ e^t\sin t,\ e^t\}$$

i pokazati da oni zatvaraju konstantne kutove s osi OZ. *

147. Dokazati da se vektori trobrida pratioca krivulje:

$$\vec{r}=\{t,\ t^2,\ t^3\}$$

u točki $O=(0,0,0)$ podudaraju s jediničnim vektorima koordinatnih osi.

148. Naći vektore trobrida pratioca krivulje:

$$\vec{r}=\{\cos t+\sin^2 t;\ \sin t(1-\cos t);\ -\cos t\}$$

u točki $t=\frac{\pi}{2}$.

149. Napisati jednadžbe ravnina koje čini trobrid pratilac krivulje:

$$x^2+y^2+z^2=6, \quad x^2-y^2+z^2=4$$

u točki $M=(1,1,2)$.

* Ako u daljnjem tekstu ne bude istaknuta točka u kojoj računamo izvjestan podatak, smatrat ćemo da se radi o proizvoljnoj točki.

150. Naći trobrid pratilac prostorne parabole:

$$\vec{r} = \{3t, 3t^2, 2t^3\}.$$

151. Dokazati da je geometrijsko mjesto točaka glavnih normala koje su udaljene za dužinu l od točaka obične zavojnice $\alpha : \mathbf{R} \to E^3$:

$$x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ z = bt$$

opet obična zavojnica.

152. Od svake točke krivulje:

$$x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t),\ z = 4a\sin\frac{t}{2}$$

na njenoj glavnoj normali nanesen je segment dužine $a\sqrt{1 + \sin^2\frac{t}{2}}$.

Naći jednadžbu krivulje koju opisuje krajnja točka tog segmenta.

153. Naći točke na krivulji $\alpha : \mathbf{R} \to E^3$:

$$x = \frac{2}{t},\ y = \ln t,\ z = -t^2,$$

u kojima je binormala paralelna s ravninom $x - y + 8z + 2 = 0$.

154. Na binormale krivulje $\alpha : \mathbf{R} \to E^3$:

$x = \cos\beta\cos t$, $y = \cos\beta\sin t$, $z = t\sin\beta$, gdje je β parametar, naneseni su u pozitivnom smjeru odsječci konstantne duljine jednake jedinici. Napisati jednadžbu oskulacione ravnine nove krivulje.

155. Naći vektore trobrida pratioca krivulje $\alpha : \mathbf{R} \to E^3$:

$$x = t\sin t,\ y = t\cos t,\ z = te^t$$

u ishodištu koordinatnog sustava.

156. Naći trobrid pratilac Vivijanieve krivulje (vidi zad. 55):

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \qquad x^2 + y^2 = ax,$$

te jednadžbe tangente, binormale i glavne normale.

Rješenja

101. $\dfrac{x-1}{12} = \dfrac{y-3}{-4} = \dfrac{z-4}{3}.$

102. $\dfrac{x+2}{27} = \dfrac{y-1}{28} = \dfrac{z-6}{4}.$ **103.** $\dfrac{x-1}{-4} = \dfrac{y-2}{4} = \dfrac{z-2}{0}.$

104. $\dfrac{x+1}{47} = \dfrac{y-1}{37} = \dfrac{z-6}{14}.$ **105.** $x = y + 1 = z.$ **106.** $\dfrac{x}{0} = \dfrac{y}{0} = \dfrac{z}{2},\ \phi = \dfrac{\pi}{4}.$

107. $M_1 = (-2, 12, 14)$ i $M_2 = (-4, 3, -4)$.

108. $\dfrac{X - a\,\mathrm{ch}\,t}{a\,\mathrm{sh}\,t} = \dfrac{Y - a\,\mathrm{sh}\,t}{a\,\mathrm{ch}\,t} = \dfrac{Z - ct}{c}$ **109.** $\phi = \dfrac{\pi}{2}.$

110. S ravninom YOZ tangenta je paralelna u točkama $A_1 = (2, 3, 4)$ i $A_2 = (-2, 3, -4)$, a s ravninom XOZ u točki $B = (0, 0, 0)$.

111. $x^2 + y^2 = 2a^2.$ **112.** $\dfrac{x-2}{0} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z}{2},\ y + 2z = 0.$

113. $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z-1}{3};\ x + 2y + 3z - 5 = 0.$

Presjek tangenata i ravnine XOY jest $y = \dfrac{3}{4}x^2.$

114. $\dfrac{X-x}{2yz} = \dfrac{Y-y}{z(a-2x)} = \dfrac{Z-z}{-ay};\ 2yzX + z(a-2x)Y - ayZ = 0.$

115. $\alpha = [t^2(a^2+b^2)]^{1/2} = |t|\,k.$ **116.** $\phi = \dfrac{\pi}{2}.$

118. Prema zadacima 62. i 97. imamo:

Kružnica: $x^2 + y^2 = \dfrac{a^2}{a^2 + b}$, $z = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$

119. Neka je krivulja: $\vec{r} = \{x(t), y(t), z(t)\}$, tada vrijedi:

$$F\{x(t), y(t), z(t)\} \equiv 0.$$
$$\Phi\{x(t), y(t), z(t)\} \equiv 0.$$

Diferenciramo li ove jednadžbe:

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy + \frac{\partial F}{\partial z}dz = 0,$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y}dy + \frac{\partial \Phi}{\partial z}dz = 0,$$

tada su diferencijali u odnosu:

$$\frac{dx}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} & \frac{\partial \Phi}{\partial z} \end{vmatrix}} = \frac{dy}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial z} & \frac{\partial F}{\partial x} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial z} & \frac{\partial \Phi}{\partial x} \end{vmatrix}} = \frac{dz}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x} & \frac{\partial \Phi}{\partial y} \end{vmatrix}}.$$

Na taj način jednadžba tangente glasi:

$$\frac{X-x}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} & \frac{\partial \Phi}{\partial z} \end{vmatrix}} = \frac{Y-y}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial z} & \frac{\partial F}{\partial x} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial z} & \frac{\partial \Phi}{\partial x} \end{vmatrix}} = \frac{Z-z}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x} & \frac{\partial \Phi}{\partial y} \end{vmatrix}},$$

a jednadžba normalne ravnine:

$$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x} & \frac{\partial \Phi}{\partial y} & \frac{\partial \Phi}{\partial z} \end{vmatrix} = 0.$$

120. $\frac{X-x}{ay} = \frac{Y-y}{bx} = \frac{Z-z}{xy}$; $\quad ay(X-x) + bx(X-x) + xy(Z-z) = 0.$

121. $z(X-x) + x(Z-z) = 0.$ **122.** $\frac{X}{x} - \frac{Y}{y} + \frac{Z}{z} = 1.$ **123.** $(0, 0, 0).$

124. $e^{-t}X - e^{t}Y - \sqrt{2}Z + 2t = 0.$

125. $3x+3y+z+1=0, \quad 3x-3y+z-1=0, \quad 108x-18y+z-216=0.$

126. $4\cos t X - 4\sin t Y - 3Z - \cos 2t = 0.$ **127.** $-aX + Z = 0.$

128. $bX - aY + abZ = 2ab.$ **130.** $4x - y + z - 9 = 0.$

131. $x + y + z = 0.$ **132.** $4x + 3y + 2z - 5a = 0.$

133. $Z = ay + b.$ **134.** $\sqrt{b}x - \sqrt{a}y = 0.$

138. $\frac{x}{1} = \frac{y}{-4} = \frac{z-1}{-1}$, jednadžba glavne normale,

$\frac{x}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{-2}$, jednadžba binormale.

139. $\frac{x-1}{11} = \frac{y-1}{8} = \frac{z-1}{-9}$ – glavna normala,

$\frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z-1}{1}$ – binormala.

140. $\frac{x-\frac{1}{2}}{2} = \frac{y-\frac{2}{3}}{1} = \frac{z-\frac{1}{2}}{-2}$ – glavna normala,

$\frac{x-\frac{1}{2}}{2} = \frac{y-\frac{2}{3}}{-2} = \frac{z-\frac{1}{2}}{1}$ – binormala.

141. $\frac{x-1}{31} = \frac{y-1}{26} = \frac{z-1}{-22}$ – glavna normala,

$\frac{x-1}{6} = \frac{y-1}{-8} = \frac{z-1}{-1}$ – binormala.

142. $\frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-1}{4}$ – glavna normala,

$\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{-3}$ – binormala.

143. $\vec{t}^0 = \left\{ -\frac{3}{5}\cos t,\ \frac{3}{5}\sin t,\ -\frac{4}{5} \right\},$

$\vec{n}^0 = \{\sin t,\ \cos t,\ 0\}, \quad \vec{b}^0 = \left\{ \frac{4}{5}\cos t,\ -\frac{4}{5}\sin t,\ -\frac{13}{5} \right\}.$

144. $\vec{t}^0 = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{t}{2},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{t}{2},\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \right\}, \quad \vec{n}^0 = \left\{ \cos\frac{t}{2},\ -\sin\frac{t}{2},\ 0 \right\},$

$\vec{b}^0 = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{t}{2},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{t}{2},\ \frac{1}{\sqrt{2}} \right\}.$

145. $\vec{t}^0 = \frac{1}{2x^4 + a^4}\{2a^2x^2,\ 2x^4,\ -a^4\},$

$\vec{n}^0 = \frac{1}{2x^4 + a^4}\{a^4 - 2x^4,\ 2a^2x^2,\ 2a^2x^2\},$

$\vec{b}^0 = \frac{1}{2x^4 + a^4}\{2a^2x^2,\ -a^4,\ 2x^4\}.$

146. $\vec{t}^0 = \frac{1}{\sqrt{3}}\{\cos t - \sin t;\ \cos t + \sin t,\ 1\},$

$\vec{n}^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\{-(\cos t + \sin t),\ (\cos t - \sin t),\ 0\},$

$\vec{b}^0 = \frac{1}{\sqrt{6}}\{(\sin t - \cos t;\ -(\sin t + \cos t);\ 2\}.$

$\cos\gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}; \ \cos\gamma_2 = 0, \ \cos\gamma_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}.$

148. $\vec{t}^0 = \frac{1}{\sqrt{3}}\{-1, 1, 1\}; \quad \vec{n}^0 = \frac{1}{\sqrt{42}}\{-5, -4, 1\}; \quad \vec{b}^0 = \frac{1}{\sqrt{14}}\{1, -2, 3\}.$

149. $2x - z = 0$ – normalna ravnina;

$y - 1 = 0$ – oskulaciona ravnina;

$x + 2z - 5 = 0$ – rektifikaciona ravnina.

150. $\vec{t}^0 = \dfrac{1}{1+2t^2}\{1;\ 2t;\ 2t^2\}$;

$\vec{n}^0 = \dfrac{1}{(1+2t^2)^2}\{-2t;\ 1-2t^2,\ 2t\}$;

$\vec{b}^0 = \dfrac{1}{(1+2t^2)^2}\{2t^2;\ -2t;\ 1\}$;

$(x-3t) + 2t(y-3t^2) + 2t^2(z-2t^3) = 0$ – normalna;

$-2t(x-3t) + (1-2t^2)\ (y-3t^2) + 2t(z-2t^3) = 0$ – rektifikaciona;

$2t^2(x-3t) - 2t(y-3t^2) + (z-2t^3) = 0$ – oskulaciona;

151. Prema zad. 97. glavna normala ima parametarske jednadžbe:

$$\begin{aligned} X &= a\cos t - \lambda a(a^2+b^2)\cos t \\ Y &= a\sin t - \lambda a(a^2+b^2)\sin t \qquad (*) \\ Z &= bt. \end{aligned}$$

Odaberimo λ tako da bude udaljenost $\overline{AB}^2$ jednaka l^2, gdje je točka $A = (X,\ Y,\ Z)$ na glavnoj normali, a $B = (x,\ y,\ z)$ na zavojnici.

Izlazi: $\lambda = \pm\dfrac{l}{a(a^2+b^2)}$. Ako je $l > a$, tada je $\lambda < 0$, pa je traženo geometrijsko mjesto opet zavojnica:

$$x = (a+l)\cos t,\ y = (a+l)\sin t;\ z = bt.$$

Ako je $l < a$, tada je $\lambda > 0$, geometrijsko mjesto točaka na glavnoj normali je opet zavojnica:

$$x = (a-l)\cos t,\ y = (a-l)\sin t,\ z = bt.$$

Ploha što je čine sve glavne normale dana je gornjim jednadžbama (*). Eliminiramo li t i λ, imamo:

$$\frac{y - a\sin t}{x - a\cos t} = \operatorname{tg} t,\ \text{tj.}\ y = x\operatorname{tg} t.$$

Iz $t = \dfrac{z}{b}$ ploha što je čine sve glavne normale zavojnice (heliks) ima jednadžbu:

$y = x\operatorname{tg}\dfrac{z}{b}$ i zove se helikoid (vidi sl. 40 na str. 110).

152. $z = 3a\sin\dfrac{x}{2a}$.

153. $A = (1,\ \ln 2,\ -4)$.

154. $\sin\alpha\sin(t-\alpha)X - \sin\alpha\cos(t-\alpha)Y + Z = t\sin\alpha + \cos\alpha$.

155. $\vec{t}^0 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(\vec{j}+\vec{k})$; $\quad \vec{n}^0 = \dfrac{1}{\sqrt{6}}(2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k})$; $\quad \vec{b}^0 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(\vec{i}+\vec{j}-\vec{k})$.

156. Koristeći parametarske jednadžbe:

$$x = \frac{a}{2}(1+\cos t),\qquad y = \frac{a}{2}\sin t,\qquad z = a\sin\frac{t}{2},\ \text{imamo:}$$

$$\vec{t}^0 = \frac{1}{\sqrt{1+\cos^2\frac{t}{2}}}\left\{-\sin t,\ \cos t,\ \cos\frac{t}{2}\right\};$$

$$\vec{b}^0 = \sqrt{\frac{2}{13+3\cos t}}\left\{\sin\frac{t}{2}(2+\cos t);\quad -\cos\frac{t}{2}(1+\cos t);\quad 2\right\};$$

$$\vec{n}^0 = \frac{1}{\sqrt{Q}}\left\{\left[-\cos^2\frac{t}{2}(1+\cos t) - 2\cos t\right];\quad -\frac{1}{2}\sin t(6+\cos t);\quad -\sin\frac{t}{2}\right\},$$

gdje je:

$$Q = \left[-\cos^2\frac{t}{2}(1+\cos t) - 2\cos t]^2 + \frac{1}{4}\sin^2 t(6+\cos t)^2 + \sin^2\frac{t}{2}\right].$$

Nadalje je tangenta:

$$\frac{X - \frac{a}{2}(1+\cos t)}{-\sin t} = \frac{Y - \frac{a}{2}\sin t}{\cos t} = \frac{Z - a\sin\frac{t}{2}}{\cos\frac{t}{2}};$$

binormala:

$$\frac{X - \frac{a}{2}(1+\cos t)}{\sin\frac{t}{2}(2+\cos t)} = \frac{Y - \frac{a}{2}\sin t}{-\cos t\,\frac{t}{2}(1+\cos t)} = \frac{Z - a\sin\frac{t}{2}}{2}.$$

glavna normala:

$$\frac{X - \frac{a}{2}(1+\cos t)}{-\cos^2\frac{t}{2}(1+\cos t) - 2\cos t} = \frac{Y - \frac{a}{2}\sin t}{-\frac{1}{2}\sin t(6+\cos t)} = \frac{Z - a\sin\frac{t}{2}}{-\sin\frac{t}{2}};$$

normalna ravnina:

$$\sin t\,X - \cos t\,Y - \cos\frac{t}{2}\,Z = 0;$$

oskulaciona ravnina:

$$\sin\frac{t}{2}(2+\cos t)\,X - \cos\frac{t}{2}(1+\cos t)\,Y + 2Z - \frac{a}{2}\sin\frac{t}{2}(5+\cos t) = 0;$$

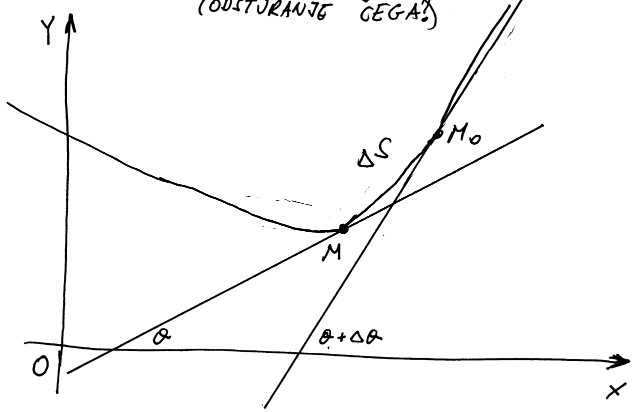
rektifikaciona ravnina:

$$\left[-\cos^2\frac{t}{2}(1+\cos t) - 2\cos t\right]X - \frac{1}{2}\sin t(6+\cos t)\,Y - \sin\frac{t}{2}\,Z + \frac{a}{4}(3+\cos t)^2 = 0.$$

Zakrivljenost i torzija krive

Zakrivljenost ili krivina krive u ravni je veličina koja karakteriše stepen njenog odstupanja od prave u okolini neke tačke M.

(ODSTUPANJE ČEGA?)



Pravac krive u tački M se može okarakterisati uglom α koju gradi tangenta na krivu u tački M s osom Ox (vidi sliku). Brzina mijenjanja ugla α pri ravnomjernom kretanju tačke M po krivoj naziva se krivina krive u tački M

Torzija krive je brzina obrtanja oskulatorne ravni krive u tački A ako se tačka A kreće jednako (ravnomjerno) po krivoj brzinom jednakom jedinici.

Na osnovu ove definicije, šta znači ako je torzija uvijek jednaka nuli.

Date definicije krivine i torzije su opisne definicije.

Krivinu krive ćemo označavati sa K a poluprečnik krivine sa $R=\frac{1}{K}$. Torziju ćemo označavati sa $\frac{1}{T}$ a poluprečnik torzije sa $|T|$.

\# Odrediti jedinične vektore tangente, glavne normale i binormale krive

$$x=e^t\cos t,\quad y=e^t\sin t,\quad z=e^t.$$

Zatim naći krivinu i torziju date krive.

R: Vektore tangente, binormale i normale krive određujemo formulama $\vec{t}=\dot{\vec{r}}$, $\vec{b}=\dot{\vec{r}}\times\ddot{\vec{r}}$, $\vec{n}=\vec{b}\times\vec{t}$.

$$\vec{r}=(e^t\cos t,\ e^t\sin t,\ e^t)$$

$$\dot{\vec{r}}=(e^t\cos t-e^t\sin t,\ e^t\sin t+e^t\cos t,\ e^t)$$

$$\ddot{\vec{r}}=(e^t\cos t-e^t\sin t-e^t\sin t-e^t\cos t,\ e^t\sin t+e^t\cos t+e^t\cos t-e^t\sin t,\ e^t)$$

$$=(-2e^t\sin t,\ 2e^t\cos t,\ e^t)$$

$$\dddot{\vec{r}}=e^t(-2\sin t-2\cos t,\ 2\cos t-2\sin t,\ 1)$$

$$\vec{t}=e^t(\cos t-\sin t,\ \sin t+\cos t,\ 1)$$

$$|\vec{t}|^2=e^{2t}(\cos^2 t\cancel{-2\cos t\sin t}+\sin^2 t+\sin^2 t\cancel{+2\sin t\cos t}+\cos^2 t+1)=$$

$$=3e^{2t}\quad\Rightarrow\quad|\vec{t}|=e^t\sqrt{3}$$

Jedinični vektor tangente je

$$\vec{t}_0=\frac{\vec{t}}{|\vec{t}|}=\frac{1}{\sqrt{3}}(\cos t-\sin t,\ \sin t+\cos t,\ 1)$$ jedinični vektor tangente

$$\vec{b}=\dot{\vec{r}}\times\ddot{\vec{r}}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ e^t\cos t-e^t\sin t&e^t\sin t+e^t\cos t&e^t\\ -2e^t\sin t&2e^t\cos t&e^t\end{vmatrix}=$$

$$=e^t\cdot e^t\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ \cos t-\sin t&\sin t+\cos t&1\\ -2\sin t&2\cos t&1\end{vmatrix}=$$

$$=e^{2t}(\sin t+\cos t-2\cos t,\ -(\cos t-\sin t+2\sin t),\ 2\cos^2 t\cancel{-2\sin t\cos t}+2\sin^2 t\cancel{+2\sin t\cos t})$$

$$\vec{b} = e^{2t}(\sin t - \cos t, -\sin t - \cos t, 2)$$

$$|\vec{b}|^2 = e^{4t}\cdot(\sin^2 t \cancel{-2\sin t\cos t} + \cos^2 t + \sin^2 t \cancel{+ 2\sin t\cos t} + \cos^2 t + 4)$$

$$|\vec{b}| = e^{2t}\sqrt{6}$$

$$\vec{b}_0 = \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(\sin t - \cos t, -(\sin t + \cos t), 2)$$ jedinični vektor binormale

$$\vec{n}_0 = \vec{b}_0 \times \vec{t}_0 = \frac{1}{\sqrt{6}}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \sin t - \cos t & -\sin t - \cos t & 2 \\ \cos t - \sin t & \sin t + \cos t & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{18}}(-\sin t - \cos t + 2\sin t - 2\cos t, -(\sin t - \cos t - 2\cos t + 2\sin t), \sin^2 t - \cos^2 t + \cos^2 t - \sin^2 t) =$$

$$= \frac{1}{3\sqrt{2}}((-3)(\sin t + \cos t), (-3)\cdot(\sin t - \cos t), 0) =$$

$$\vec{n}_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}((-1)(\sin t + \cos t), -\sin t + \cos t, 0)$$ jedinični vektor glavne normale

Krivinu krive možemo izračunati po formuli $K = \frac{1}{R}$ gdje je R poluprečnik krivine $R = \frac{|\vec{t}|^3}{|\vec{b}|}$

$$R = \frac{(e^t\sqrt{3})^3}{e^{2t}\sqrt{6}} = \frac{e^{3t}3\sqrt{3}}{e^{2t}\sqrt{6}} = 3e^t\sqrt{\frac{1}{2}} \Rightarrow K = \frac{\sqrt{2}}{3e^t}$$ tražena krivina krive

Torziju možemo izračunati po formuli $-\tau = \frac{1}{T} = \frac{\dddot{\vec{r}}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2}$

$$\dddot{\vec{r}} = e^t(-2\sin t - 2\cos t, \overbrace{2\cos t - 2\sin t}^{2(\cos t - \sin t)}, 1)$$

$$\vec{b} = e^{2t}(\sin t - \cos t, \underbrace{-\sin t - \cos t}_{(-1)(\cos t + \sin t)}, 2)$$

$$\dddot{\vec{r}}\cdot\vec{b} = e^{3t}((-2)(\sin^2 t - \cos^2 t) - 2(\cos^2 t - \sin^2 t) + 2) = 2e^{3t}$$

$$-\tau = \frac{2e^{3t}}{e^{4t}\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{4}{6}}\cdot\frac{1}{e^t} = \frac{\sqrt{2}}{e^t\sqrt{3}}$$ tražena torzija krive ← GREŠKA

Pokazati da su kod krive

$$x = \mathrm{ch}\, z \qquad y = \mathrm{sh}\, z$$

radijus krive i torzije (R i T) jednaki.

Rj. Ako uvedemo smjenu $z = t$ datu krivu možemo napisati u obliku

$$C \searrow \vec{r}: \begin{cases} x = \mathrm{ch}\, t \\ y = \mathrm{sh}\, t \\ z = t \end{cases}$$

Tada je

$$\dot{\vec{r}} = (\mathrm{sh}\, t, \mathrm{ch}\, t, 1)$$
$$\ddot{\vec{r}} = (\mathrm{ch}\, t, \mathrm{sh}\, t, 0)$$
$$\dddot{\vec{r}} = (\mathrm{sh}\, t, \mathrm{ch}\, t, 0)$$

Neka je $\dot{\vec{r}} = \vec{r}(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$, $\ddot{\vec{r}} = \vec{r}(\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z})$, $\dddot{\vec{r}} = \vec{r}(\dddot{x}, \dddot{y}, \dddot{z})$

Tada je

$$R^2 = \frac{(\dot{\vec{r}}^2)^3}{[\dot{\vec{r}}\times\ddot{\vec{r}}]^2}, \quad a \quad T = \frac{-[\dot{\vec{r}}\times\ddot{\vec{r}}]^2}{\dot{\vec{r}}(\ddot{\vec{r}}\times\dddot{\vec{r}})}$$

$$\dot{\vec{r}}^2 = \dot{\vec{r}}\cdot\dot{\vec{r}} = \mathrm{sh}^2 t + \mathrm{ch}^2 t + 1 = 2\mathrm{ch}^2 t \qquad \boxed{\mathrm{sh}^2 t + 1 = \mathrm{ch}^2 t}$$

$$\dot{\vec{r}}\times\ddot{\vec{r}} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \mathrm{sh}\, t & \mathrm{ch}\, t & 1 \\ \mathrm{ch}\, t & \mathrm{sh}\, t & 0 \end{vmatrix} = (-\mathrm{sh}\, t, \mathrm{ch}\, t, \mathrm{sh}^2 t - \mathrm{ch}^2 t) = (-\mathrm{sh}\, t, \mathrm{ch}\, t, -1)$$

$$(\dot{\vec{r}}\times\ddot{\vec{r}})^2 = \mathrm{sh}^2 t + \mathrm{ch}^2 t + 1 = 2\mathrm{ch}^2 t$$

$$R^2 = \frac{(2\mathrm{ch}^2 t)^3}{2\mathrm{ch}^2 t} = (2\mathrm{ch}^2 t)^2 \Rightarrow R = |2\mathrm{ch}^2 t| = 2\mathrm{ch}^2 t$$

$$\dot{\vec{r}}(\ddot{\vec{r}}\times\dddot{\vec{r}}) = \begin{vmatrix} \mathrm{sh}\, t & \mathrm{ch}\, t & 1 \\ \mathrm{ch}\, t & \mathrm{sh}\, t & 0 \\ \mathrm{sh}\, t & \mathrm{ch}\, t & 0 \end{vmatrix} = -1\underbrace{(\mathrm{ch}^2 t - \mathrm{sh}^2 t)}_{-1} = +1$$

$$T = +\frac{2\mathrm{ch}^2 t}{+1} = 2\mathrm{ch}^2 t \qquad R = |T| = 2\mathrm{ch}^2 t$$

traženo rješenje

Nađi poluprečnik torzije $|T|$ za krivu

$$\vec{r} = \cos t\,\vec{i} + \sin t\,\vec{j} + \operatorname{sh} t\,\vec{k}.$$

Rj. Poluprečnik torzije $|T|$ možemo naći po formuli

$$T = -\frac{[\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}]^2}{\dot{\vec{r}}\,[\ddot{\vec{r}} \times \dddot{\vec{r}}]}$$

$$\dot{\vec{r}} = (-\sin t, \cos t, \operatorname{ch} t)$$

$$\ddot{\vec{r}} = (-\cos t, -\sin t, \operatorname{sh} t)$$

$$\dddot{\vec{r}} = (\sin t, -\cos t, \operatorname{ch} t)$$

$$\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\sin t & \cos t & \operatorname{ch} t \\ -\cos t & -\sin t & \operatorname{sh} t \end{vmatrix} = (\cos t \operatorname{sh} t + \sin t \operatorname{ch} t,\ \sin t \operatorname{sh} t - \cos t \operatorname{ch} t,\ 1)$$

to je

$$[\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}]^2 = \cos^2 t \operatorname{sh}^2 t + \cancel{2 \sin t \cos t \operatorname{sh} t \operatorname{ch} t} + \sin^2 t \operatorname{ch}^2 t + \sin^2 t \operatorname{sh}^2 t - \cancel{2 \sin t \cos t \operatorname{sh} t \operatorname{ch} t} + \cos^2 t \operatorname{ch}^2 t + 1 =$$

$$= \operatorname{sh}^2 t + \operatorname{ch}^2 t + 1 = \operatorname{ch}^2 t + \left(\frac{e^t - e^{-t}}{2}\right)^2 + 1 = \operatorname{ch}^2 t + \frac{e^{2t} - 2 + e^{-2t}}{4} + 1$$

$$= \operatorname{ch}^2 t + \frac{e^{2t} + 2 + e^{-2t}}{4} = 2 \operatorname{ch}^2 t$$

$$\dot{\vec{r}}\,[\ddot{\vec{r}} \times \dddot{\vec{r}}] = \begin{vmatrix} -\sin t & \cos t & \operatorname{ch} t \\ -\cos t & -\sin t & \operatorname{sh} t \\ \sin t & -\cos t & \operatorname{ch} t \end{vmatrix} \xrightarrow{I_v + III_v} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2\operatorname{ch} t \\ -\cos t & -\sin t & \operatorname{sh} t \\ \sin t & -\cos t & \operatorname{ch} t \end{vmatrix} = 2 \operatorname{ch} t$$

$$|T| = \left| -\frac{2 \operatorname{ch}^2 t}{2 \operatorname{ch} t} \right| = \operatorname{ch} t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$$

traženi poluprečnik torzije

Nađi radijus krivine i krivinu krive

$$C: \begin{cases} x = \sin z - z \cos z \\ y = \cos z + z \sin z \end{cases}$$

u proizvoljnoj tački.

Rj. Kao parametar stavimo $z = t$. Tada

$$\vec{r} = (\sin t - t\cos t,\ \cos t + t \sin t,\ t)$$

Krivina krive K je data izrazom $K = \dfrac{|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}|}{|\dot{\vec{r}}|^3}$,

a poluprečnik krivine je $R = \dfrac{1}{K}$.

$$\dot{\vec{r}} = (\cos t - \cos t + t \sin t,\ -\sin t + \sin t + t \cos t,\ 1) = (t \sin t,\ t \cos t,\ 1)$$

$$\ddot{\vec{r}} = (\sin t + t \cos t,\ \cos t - t \sin t,\ 0)$$

$$\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ t \sin t & t \cos t & 1 \\ \sin t + t \cos t & \cos t - t \sin t & 0 \end{vmatrix} = (t \sin t - \cos t,\ \sin t + t \cos t,\ t \sin t \cos t - t^2 \sin^2 t - t \sin t \cos t - t^2 \cos^2 t)$$

$$= (t \sin t - \cos t,\ \sin t + t \cos t,\ -t^2)$$

$$|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}|^2 = (\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}})^2 = t^2 \sin^2 t - \cancel{2 t \sin t \cos t} + \underbrace{\cos^2 t + \sin^2 t}_{=1} + \cancel{2 t \sin t \cos t} + t^2 \cos^2 t + t^4 = 1 + t^2 + t^4$$

$$|\dot{\vec{r}}|^2 = t^2 \sin^2 t + t^2 \cos^2 t + 1 = t^2 + 1$$

$$|\dot{\vec{r}}| = \sqrt{t^2 + 1}$$

$$K = \frac{\sqrt{1 + t^2 + t^4}}{\sqrt{(t^2+1)^3}} \quad ; \quad R = \frac{\sqrt{(t^2+1)^3}}{\sqrt{1 + t^2 + t^4}}.$$

(#) Napisati jednačinu skupa tačaka u kojima tangente zavojnice $\vec{r}=(a\cos t, a\sin t, bt)$ prodiru ravan $z=0$. Odrediti zakrivljenost dobijene krive.

Rj:

Pronađimo prvo jednačinu tangente na zavojnicu u proizvoljnoj tački $M(t)$.

$$\frac{d\vec{r}}{dt}=(-a\sin t, a\cos t, b)$$

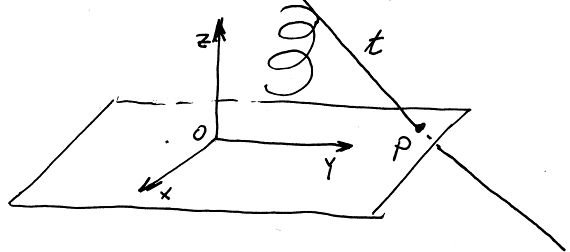
Ako uzmemo tačku $M(a\cos t, a\sin t, bt)$ imamo sljedeću jednačinu tangente

$$t: \frac{x-a\cos t}{-a\sin t}=\frac{y-a\sin t}{a\cos t}=\frac{z-bt}{b}$$

U parametarskom obliku, gdje je u parametar, imamo

$$t: \begin{cases} x=a\cos t-au\sin t\\ y=a\sin t+au\cos t\\ z=bt+ub\\ u\in\mathbb{R}\end{cases}$$

u je tekuća koordinata za tačke tangente



Prodor P tangente $\vec{t}$ sa ravni $z=0$ dobija se za $bt+ub=0$, tj. ~~za~~ $u=-t$.

Dakle koordinate tačke prodora P su

$$(a\cos t+at\sin t, a\sin t-at\cos t, 0)$$

Za različitu vrijednost parametra t drugu tačku na zavojnici, drugačiju tangentu na zavojnicu a samim time i drugačiju tačku prodora.

Skup tačaka u kojima tangente zavojnice $\vec{r}$ prodiru ravan $z=0$ formiraju sljedeću krivu

$$\vec{r}^*: \begin{cases} x=a\cos t+at\sin t\\ y=a\sin t-at\cos t\\ z=0\\ -\infty<t<+\infty\end{cases}$$

Sad trebamo odrediti zakrivljenost dobijene krive

$$\vec{t}^*=\dot{\vec{r}}^*=(\cancel{-a\sin t}+\cancel{a\sin t}+at\cos t, \cancel{a\cos t}-\cancel{a\cos t}+at\sin t, 0)$$

Krivina K je određena relacijom $K=\frac{1}{R}$ gdje je R poluprečnik krivine određen relacijom $R=\frac{|\vec{t}^*|^3}{|\vec{b}^*|}$.

$$\vec{b}^*=\dot{\vec{r}}^*\times\ddot{\vec{r}}^*=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ at\cos t & at\sin t & 0\\ a\cos t-at\sin t & a\sin t+at\cos t & 0\end{vmatrix}\ \underline{\underline{(**)}}$$

$$\ddot{\vec{r}}^*=(a\cos t-at\sin t, a\sin t+at\cos t, 0)$$

$$\underline{\underline{(**)}}\ a^2\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ t\cos t & t\sin t & 0\\ \cos t-t\sin t & \sin t+t\cos t & 0\end{vmatrix}=a^2(0,0,\underline{t\sin t\cos t}+t^2\cos^2 t\ \underline{-t\sin t\cos t}+t^2\sin^2 t)$$

$$=a^2(0,0,t^2) \qquad\qquad =a^2(0,0,t^2)$$

$$|\vec{t}^*|=\sqrt{a^2t^2\cos^2 t+a^2t^2\sin^2 t+0}=at$$

$$|\vec{t}^*|^3=a^3t^3$$

$$|\vec{b}^*|=a^2\sqrt{0+0+t^4}=a^2t^2$$

$$R=\frac{a^3t^3}{a^2t^2}=at \qquad K=\frac{1}{at}$$ tražena zakrivljenost date krive

Izračunati torziju krive $\vec{r} = a(1-\cos t, \sin 2t, 2\cos t)$ u proizvoljnoj tački. Odrediti jednačinu ravni kojoj kriva pripada.

Rj: Torziju krive možemo izračunati po formuli

$$\frac{1}{T} = -\frac{\dot{\vec{r}}\,[\ddot{\vec{r}}\times\dddot{\vec{r}}]}{|\dot{\vec{r}}\times\ddot{\vec{r}}|^2}$$

Kako je

$$\dot{\vec{r}}\,[\ddot{\vec{r}}\times\dddot{\vec{r}}] = a^3\begin{vmatrix} \sin t & 2\cos 2t & -2\sin t \\ \cos t & -4\sin 2t & -2\cos t \\ -\sin t & -8\cos 2t & 2\sin t \end{vmatrix} \underset{=\!=\!=}{III_k + I_k\cdot 2} 0$$

To je torzija $\frac{1}{T} = 0$

Ako je torzija $\frac{1}{T} = 0$ u svakoj tački krive, onda kriva leži u ravni. Ta ravan u ovom slučaju ima jednačinu $Ax + By + Cz + D = 0$.

U našem slučaju

$$A(a - a\cos t) + B a \sin 2t + C 2a\cos t + D = 0 \quad /:a$$

$$(A+D) + (2C-A)\cos t + B\sin 2t = 0 \quad \forall t$$

$A+D=0,\quad 2C-A=0,\quad B=0$ tj.

$$D=-A,\quad C=\frac{A}{2},\quad B=0$$

$$Ax + \frac{A}{2}z - A = 0 \quad /:A$$

$$x + \frac{1}{2}z - 1 = 0$$

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ \ddot{x} & \ddot{y} & \ddot{z} \end{vmatrix} = 0$$ jedn. osk. ravni u $M(x_1,y_1,z_1)$

$\vec{t} \perp \vec{b}$

$\vec{t} \perp \vec{n}$

$\vec{b} \perp \vec{n}$

$\dot{x}(x-x_1) + \dot{y}(y-y_1) + \dot{z}(z-z_1) = 0$ jedn. norm. ravni

$\ddot{x}(x-x_1) + \ddot{y}(y-y_1) + \ddot{z}(z-z_1) = 0$ jedn. rektif. ravni

VI GLAVA

DIFERENCIJALNA GEOMETRIJA

§ 1. Krive u prostoru

*Ako je u trodimenzionalnom euklidskom **prostoru kriva** za-data jednačinom*

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k},$$

ili u parametarskom obliku

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t),$$

tada je dužina luka krive od tačke sa parametrom t_o *do tačke sa parametrom* t_1 *data formulom*

$$s = \int_{t_o}^{t_1} ds = \int_{t_o}^{t_1} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\, dt.$$

Vektor tangente, binormale i normale krive odredjujemo formulama

$$\vec{t} = \dot{\vec{r}}, \quad \vec{b} = \dot{\vec{r}}\times\ddot{\vec{r}}, \quad \vec{n} = \vec{b}\times\vec{t} \quad \left(\dot{\vec{r}} = \frac{d\vec{r}}{dt},\ \ddot{\vec{r}} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2},\ \dddot{\vec{r}} = \frac{d^3\vec{r}}{dt^3}\right)$$

i njihove ortove ćemo obeležiti respektivno sa

$$\vec{t}_o, \vec{b}_o, \vec{n}_o.$$

Frenet-Serretove formule

Triedar $(\vec{t}, \vec{n}, \vec{b})$ zove se prirodni triedar krive $\vec{r}=\vec{r}(t)$, odnosno $\vec{r}=\vec{r}(s)$. On se mijenja od tačke do tačke krive. Tu promjenu opisuju Freneovi (Frenet) obrasci

$$\frac{d\vec{t}_0}{ds} = K\vec{n}_0 \qquad \frac{d\vec{n}_0}{ds} = -K\vec{t}_0 - \frac{1}{T}\vec{b}_0$$

$$\frac{d\vec{b}_0}{ds} = \frac{1}{T}\vec{n}_0$$

gdje je K krivina krive, a $\frac{1}{T}$ torzija krive,

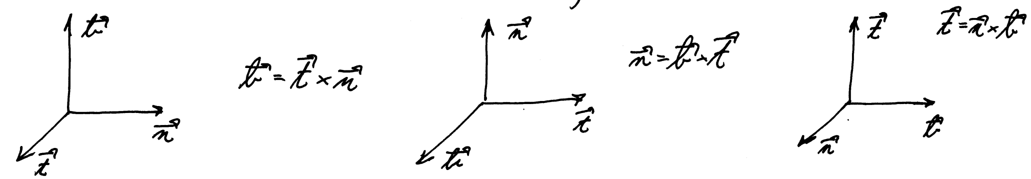
pri tome se torzija krive $\frac{1}{T}$ računa po formuli

$$\frac{1}{T} = -\frac{\dot{\vec{r}}(\ddot{\vec{r}}\times\dddot{\vec{r}})}{|\dot{\vec{r}}\times\ddot{\vec{r}}|^2}$$

Često se upotrebljava i oznaka $-\tau = \frac{1}{T}$ za torziju.

(#) Neka je $(\vec{t}, \vec{n}, \vec{b})$ prirodni triedar krive $\vec{r}$ parametrizovane dužinom luka $\vec{r}=\vec{r}(s)$, gdje su $\vec{t}, \vec{n}$ i $\vec{b}$ jedinični vektori koji zadovoljavaju Frenetove jednačine. Izračunati (tačnije pojednostaviti) izraz $\vec{n}\times\frac{d\vec{n}}{ds}$ (riješiti se vektorskog proizvoda).

Rj. Za prirodni triedar znamo da vrijedi:



Iz čega slijedi $-\vec{b}=\vec{n}\times\vec{t}$, $-\vec{n}=\vec{t}\times\vec{b}$ i $-\vec{t}=\vec{b}\times\vec{n}$.

Iz Frenetovih formula $\frac{d\vec{n}}{ds} = -K\vec{t}+\tau\vec{b}$ gdje je K krivina krive, a τ torzija krive.

$$\vec{n}\times\frac{d\vec{n}}{ds} = \vec{n}\times(-K\vec{t}+\tau\vec{b}) = -K(\vec{n}\times\vec{t})+\tau(\vec{n}\times\vec{b}) =$$

$$= K\vec{b}+\tau\vec{t}$$

traženo rješenje

\# Napisati Freneove obrasce za krivu

$$\vec{r} = a\cos t\,\vec{i} + a\sin t\,\vec{j} + bt\,\vec{k}.$$

Rj. Freneovi obrazci su (za krivu $\vec{r}=\vec{r}(s)$) $\dfrac{d\vec{t}_0}{ds} = K\vec{n}_0$, $\dfrac{d\vec{n}_0}{ds} = -K\vec{t}_0 - \dfrac{1}{T}\vec{b}_0$

i $\dfrac{d\vec{b}_0}{ds} = \dfrac{1}{T}\vec{n}_0$ gdje je K krivina krive, a $\dfrac{1}{T}$ torzija krive.

Torzija krive $\dfrac{1}{T}$ se računa po formuli $\dfrac{1}{T} = -\dfrac{\dot{\vec{r}}(\ddot{\vec{r}}\times\dddot{\vec{r}})}{|\dot{\vec{r}}\times\ddot{\vec{r}}|^2}$,

a krivinu krive možemo izračunati po formuli $K = \dfrac{|\dot{\vec{r}}\times\ddot{\vec{r}}|}{|\dot{\vec{r}}|^3}$.

$$\vec{r} = (a\cos t,\ a\sin t,\ bt)$$

$$\dot{\vec{r}} = (-a\sin t,\ a\cos t,\ b)$$

$$\ddot{\vec{r}} = (-a\cos t,\ -a\sin t,\ 0)$$

$$\dddot{\vec{r}} = (a\sin t,\ -a\cos t,\ 0)$$

$$\dot{\vec{r}}\times\ddot{\vec{r}} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -a\sin t & a\cos t & b \\ -a\cos t & -a\sin t & 0 \end{vmatrix} = (+ab\sin t,\ -ab\cos t,\ a^2)$$

$$|\dot{\vec{r}}\times\ddot{\vec{r}}|^2 = \underline{a^2b^2\sin^2 t} + \underline{a^2b^2\cos^2 t} + a^4 = a^2b^2 + a^2 = a^2(b^2+a^2)$$

$$|\dot{\vec{r}}|^2 = \dot{\vec{r}}^2 = a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t + b^2 = a^2 + b^2$$

$$K = \frac{a\sqrt{b^2+a^2}}{(a^2+b^2)\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{a}{a^2+b^2}$$

$$\dot{\vec{r}}(\ddot{\vec{r}}\times\dddot{\vec{r}}) = \begin{vmatrix} -a\sin t & a\cos t & b \\ -a\cos t & -a\sin t & 0 \\ a\sin t & -a\cos t & 0 \end{vmatrix} = b(a^2\cos^2 t + a^2\sin^2 t) = a^2 b$$

$$\frac{1}{T} = -\frac{a^2 b}{a^2(a^2+b^2)} = -\frac{b}{a^2+b^2}$$

Traženi Freneovi obrasci su

$$\frac{d\vec{t}_0}{ds} = \frac{a}{a^2+b^2}\vec{n}_0$$

$$\frac{d\vec{n}_0}{ds} = -\frac{a}{a^2+b^2}\vec{t}_0 + \frac{b}{a^2+b^2}\vec{b}_0$$

$$\frac{d\vec{b}_0}{ds} = -\frac{b}{a^2+b^2}\vec{n}_0$$

\# Vektor položaja pokretne tačke dat je kao f-ja luka s: $\vec{r} = s\vec{a} + \vec{a} \times \vec{A}(s)$, gdje je $\vec{a}$ konstantan vektor $|\vec{a}|<1$, a $\vec{A}(s)$ diferencijabilna vektorska f-ja. Dokazati da je odnos krivine i torzije konstantan.

R: Jedinične vektore $\vec{t}_0$, $\vec{n}_0$ i $\vec{b}_0$ u ovom zadatku ćemo označiti sa $\vec{t}$, $\vec{n}$ i $\vec{b}$. Znamo da je $\vec{t} = \frac{d\vec{r}}{ds}$ iz čega slijedi da je

$$\vec{t} = \vec{a} + \vec{a} \times \frac{d\vec{A}}{ds}.$$

Iz Freneovih obrazaca znamo da je

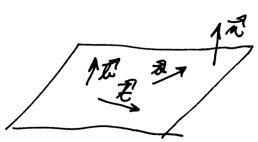
$$\frac{d\vec{t}_0}{ds} = K\vec{n}_0 \quad \text{pa je} \quad K\vec{n} = \frac{d^2\vec{r}}{ds^2} = \vec{a} \times \frac{d^2\vec{A}}{ds^2}$$

pa slijedi da je

$$\vec{t}\cdot\vec{a} = \vec{a}\cdot\vec{a} + \left(\vec{a} \times \frac{d\vec{A}}{ds}\right)\cdot\vec{a} = |\vec{a}|^2, \qquad \vec{n}\cdot\vec{a} = 0.$$

Znači, $\vec{a}$ leži u ravni određenoj vektorima $\vec{b}$ i $\vec{t}$, pa je (ako sa β označimo $\sphericalangle(\vec{b},\vec{a})$ a sa α ugao između $\sphericalangle(\vec{t},\vec{a})$) kako je $\vec{t} \perp b$

$$\beta = \sphericalangle(\vec{b},\vec{a}) = \frac{\pi}{2} - \sphericalangle(\vec{t},\vec{a}) = \frac{\pi}{2} - \alpha$$



Diferencirajmo jednakost $\vec{n}\cdot\vec{a} = 0$:

$$\frac{d\vec{n}}{ds}\vec{a} = 0.$$

Ako uvedemo oznaku $-\frac{1}{T} = \tau$

Prema Freneovim obrascima imamo

$$\frac{d\vec{n}}{ds} = -K\vec{t} + \tau\vec{b}$$

pa imamo da je

$$(-K\vec{t} + \tau\vec{b})\cdot\vec{a} = 0,$$

$$-K\vec{t}\cdot\vec{a} = -\tau\vec{b}\cdot\vec{a}$$

$$\frac{K}{\tau} = \frac{\vec{b}\cdot\vec{a}}{\vec{t}\cdot\vec{a}}$$

Kako je $\vec{t}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|^2$ to je

$$\vec{t}\cdot\vec{a} = |\vec{t}||\vec{a}|\cdot\cos\alpha = 1\cdot a\cdot\cos\alpha = a^2 \quad (\text{ako stavimo } |\vec{a}| = a)$$

tj. $\cos\alpha = a$.

Iz $\vec{b}\cdot\vec{a} = |\vec{b}||\vec{a}|\cos\beta = 1\cdot a \cos\beta = a\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) =$

$$= a\left(\cos\frac{\pi}{2}\cos\alpha + \underbrace{\sin\frac{\pi}{2}}_{=1}\sin\alpha\right) = \left|\begin{array}{l}\sin^2\alpha = 1-\cos^2\alpha \\ \sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-a^2}\end{array}\right|$$

$$= a\sqrt{1-a^2}$$

slijedi

$$\frac{K}{\tau} = \frac{a\sqrt{1-a^2}}{a^2}$$

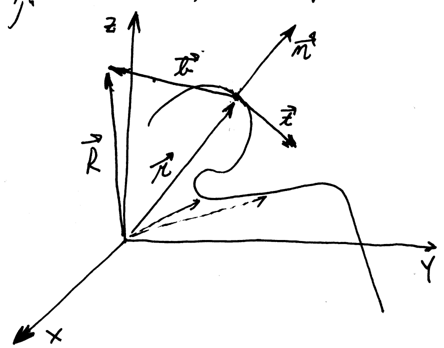
$$\frac{K}{\tau} = \frac{\sqrt{1-a^2}}{a} \quad \text{traženi odnos}$$

Na binormali krive $\vec{r}=\vec{r}(s)$ konstantne torzije nalazi se odsječak date dužine l čiji je jedan kraj na krivoj. Drugi kraj odsječka opisuje krivu $\vec{R}=\vec{R}(s)$ kad se s mijenja.

a) Razložiti vektor binormale krive $\vec{R}=\vec{R}(s)$ po pravcima ortova prirodnog triedra date krive.

b) Odrediti ugao između binormala krivih koje odgovaraju određenom s.

Rj. Neka su $\vec{t}, \vec{n}, \vec{b}$ pravci ortova prirodnog triedra



Jedan kraj dužine l je na krivoj $\vec{r}=\vec{r}(s)$. Vektor položaja drugog kraja dužine l (vidi sliku) biće

$$\vec{R}=\vec{r}(s)+l\vec{b}(s).$$

a) Za krivu $\vec{R}=\vec{R}(s)$, s ne mora biti dužina luka, pa njen vektor binormale $\vec{b}_1=\dot{\vec{R}}\times\ddot{\vec{R}}$, nije obavezno jedinični.

Primjenjujući Frenetove obrasce i vodeći računa o tome da je $\tau=\text{const.}$ izračunajmo $\dot{\vec{R}}$ i $\ddot{\vec{R}}$.

$$\vec{R}=\vec{r}(s)+l\vec{b}$$

$$\dot{\vec{R}}=\frac{d\vec{r}}{ds}+l\left(\frac{d\vec{b}}{ds}\right)=\vec{t}+l(-\tau\vec{n}), \quad \text{gdje je } -\tau=\frac{1}{T}$$

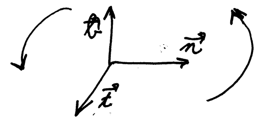
$$\ddot{\vec{R}}=\frac{d\vec{t}}{ds}-l\tau\left(\frac{d\vec{n}}{ds}\right)=K\vec{n}-l\tau(-K\vec{t}+\tau\vec{b})$$

$$\vec{b}_1=\dot{\vec{R}}\times\ddot{\vec{R}}=(\vec{t}-l\tau\vec{n})\times(K\tau l\vec{t}+K\vec{n}-l\tau^2\vec{b})$$

$$=-K\tau^2l^2(\vec{n}\times\vec{t})+K(\vec{t}\times\vec{n})-l\tau^2(\vec{t}\times\vec{b})+l^2\tau^3(\vec{n}\times\vec{b})$$

$$=\left|\begin{array}{l}\vec{t}\times\vec{n}=\vec{b}\\ \vec{n}\times\vec{t}=-\vec{b}\\ \vec{n}\times\vec{b}=\vec{t}\\ \vec{b}\times\vec{t}=\vec{n}\end{array}\right| = l^2\tau^3\vec{t}+K(1+l^2\tau^2)\vec{b}+l\tau^2\vec{n}$$

time smo $\vec{b}_1$ razložili na komponente u smjeru vektora $\vec{t},\vec{n},\vec{b}$.



$\vec{t}\times\vec{n}=\vec{b}$
$\vec{n}\times\vec{b}=\vec{t}$
$\vec{b}\times\vec{t}=\vec{n}$

b) Ugao između binormala biće

$$\cos\varphi=\frac{\vec{b}_1\cdot\vec{b}}{|\vec{b}_1|\underbrace{|\vec{b}|}_{=1}}=\frac{K(1+l^2\tau^2)}{\sqrt{(l^2\tau^3)^2+K^2(1+l^2\tau^2)^2+(l\tau^2)^2}}=$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\vec{b}_1=l^2\tau^3\vec{t}+K(1+l^2\tau^2)\vec{b}+l^2\tau^3(\vec{n}\times\vec{b})\\ \vec{b}=\vec{b}\end{array}}$$

$$=\frac{K(1+l^2\tau^2)}{\sqrt{l^4\tau^6+K^2(1+2l^2\tau^2+l^4\tau^4)+l^2\tau^4}}=$$

$$=\frac{K(1+l^2\tau^2)}{\sqrt{l^2\tau^4(l^2\tau^2+1)+K^2(1+l^2\tau^2)^2}}=\frac{K\sqrt{1+l^2\tau^2}}{\sqrt{l^2\tau^4+K^2(1+l^2\tau^2)}}$$

traženi ugao

(#) Data je kriva $\vec{r}=\vec{r}(s)$. Razložiti vektor $\dfrac{d^3\vec{r}}{ds^3}$ po pravcima ortova prirodnog triedra.

Rj. Jedinične vektore $\vec{t}_0$, $\vec{n}_0$ i $\vec{b}_0$ označimo sa $\vec{t}$, $\vec{n}$ i $\vec{b}$. Kako je

$$\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}=K\vec{n}$$

(zato što je $\dfrac{d\vec{t}}{ds}=K\vec{n} \Rightarrow \dfrac{d}{ds}\left(\dfrac{d\vec{r}}{ds}\right)=K\vec{n}$)

gdje je K krivina krive to je

$$\frac{d^3\vec{r}}{ds^3}=\frac{dK}{ds}\vec{n}+K\frac{d\vec{n}}{ds}.$$

Koristimo Freneove obrazce ($\dfrac{d\vec{n}}{ds}=-K\vec{t}+\tau\vec{b}$, gdje je $\tau=-\dfrac{1}{T}$ torzija), pa će biti

$$\frac{d^3\vec{r}}{ds^3}=\frac{dK}{ds}\vec{n}+K(-K\vec{t}+\tau\vec{b})$$

$$\frac{d^3\vec{r}}{ds^3}=-K^2\vec{t}+\frac{dK}{ds}\vec{n}+K\tau\vec{b}$$

traženo rješenje

(#) Neka je $(\vec{t},\vec{n},\vec{b})$ prirodni triedar krive $\vec{r}$ parametrizovane dužinom luka ($\vec{r}=\vec{r}(s)$), gdje su $\vec{t}$, $\vec{n}$ i $\vec{b}$ jedinični vektori. Definišimo polje δ sa $\delta \overset{def}{=} \tau\vec{t}+K\vec{b}$ gdje su K i $-\tau$ krivina i torzija krive $\vec{r}$. Izračunati

$$\frac{d\vec{t}}{ds}-\delta\times\vec{t},\quad \frac{d\vec{n}}{ds}-\delta\times\vec{n}\quad i\quad \frac{d\vec{b}}{ds}-\delta\times\vec{b}.$$

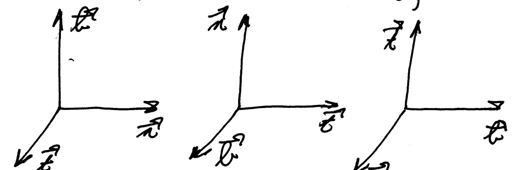
Šta možemo zaključiti na osnovu dobijenog rezultata.

Rj. Frenetovi obrasci za krivu $\vec{r}=\vec{r}(s)$ su

$$\frac{d\vec{t}}{ds}=K\vec{n},\quad \frac{d\vec{n}}{ds}=\tau\vec{b}-K\vec{t},\quad \frac{d\vec{b}}{ds}=-\tau\vec{n}$$

gdje su $\vec{t}$, $\vec{b}$ i $\vec{n}$ jedinični vektori. ...(1)

Prvo izračunajmo $\delta\times\vec{t}$, $\delta\times\vec{n}$, $\delta\times\vec{b}$.



$\vec{b}=\vec{t}\times\vec{n}$

$\vec{n}=\vec{b}\times\vec{t}$

$\vec{t}=\vec{n}\times\vec{b}$

$$\left.\begin{aligned}
\delta\times\vec{t}&=(\tau\vec{t}+K\vec{b})\times\vec{t}=\tau(\vec{t}\times\vec{t})+K(\vec{b}\times\vec{t})=K\vec{n}\\
\delta\times\vec{n}&=(\tau\vec{t}+K\vec{b})\times\vec{n}=\tau(\vec{t}\times\vec{n})+K(\vec{b}\times\vec{n})=\tau\vec{b}-K\vec{t}\\
\delta\times\vec{b}&=(\tau\vec{t}+K\vec{b})\times\vec{b}=\tau(\vec{t}\times\vec{b})+K(\vec{b}\times\vec{b})=-\tau\vec{n}
\end{aligned}\right\}\ \ldots(2)$$

Sada iz (1) i (2) možemo zaključiti da je

$$\frac{d\vec{t}}{ds}-\delta\times\vec{t}=0,\quad \frac{d\vec{n}}{ds}-\delta\times\vec{n}=0\quad i\quad \frac{d\vec{b}}{ds}-\delta\times\vec{b}=0.$$

Na osnovu dobijenog rezultata možemo zaključiti da su Frenetove jednačine za $\dfrac{d\vec{t}}{ds}$, $\dfrac{d\vec{n}}{ds}$ i $\dfrac{d\vec{b}}{ds}$ ekvivalentne jednačinama $\delta\times\vec{t}$, $\delta\times\vec{n}$ i $\delta\times\vec{b}$.

(#) Naći vektor $\vec{A}(s)$ koji zadovoljava uslove

$$\frac{d\vec{t}}{ds} = \vec{A}\times\vec{t}, \quad \frac{d\vec{n}}{ds} = \vec{A}\times\vec{n},$$

gdje je s luk krive $\vec{r}=\vec{r}(s)$ a $\vec{t}, \vec{n}, \vec{b}$ ort tangente, normale i binormale te krive, respektivno.

Rj. Vektor $\vec{A}(s)$ možemo razložiti u pravcima vektora $\vec{t}, \vec{n}$ i $\vec{b}$: $\vec{A}(s) = \alpha\vec{t}+\beta\vec{n}+\gamma\vec{b}$.

Prema Freneovim obrazcima

$$K\vec{n} = \frac{d\vec{t}}{ds} \underset{\text{prema podacu zadatka}}{\Longrightarrow} K\vec{n} = \vec{A}(s)\times\vec{t}$$

$$\Rightarrow \quad K\vec{n} = (\alpha\vec{t}+\beta\vec{n}+\gamma\vec{b})\times\vec{t} \quad \ldots(*)$$

Dalje, $\frac{d\vec{n}}{ds} = -K\vec{t}+\tau\vec{b}$ pa je iz uslova zadatka

$$-K\vec{t}+\tau\vec{b} = (\alpha\vec{t}+\beta\vec{n}+\gamma\vec{b})\times\vec{n}. \quad \ldots(**)$$

Prema tome

$$(*) \Rightarrow K\vec{n} = \alpha\vec{t}\times\vec{t}+\beta\vec{n}\times\vec{t}+\gamma\vec{b}\times\vec{t} = \beta(-\vec{b})+\gamma\vec{n}$$
$$= -\beta\vec{b}+\gamma\vec{n} \Rightarrow \beta=0,\ \gamma=K;$$

$$(**) \Rightarrow -K\vec{t}+\tau\vec{b} = (\alpha\vec{t}+K\vec{b})\times\vec{n} = \alpha\vec{t}\times\vec{n}+K\vec{b}\times\vec{n}$$
$$= \alpha\vec{b}-K\vec{t} \Rightarrow \alpha=\tau$$

Prema tome $\vec{A}(s) = \tau\vec{t}+K\vec{b}$.

Tačka M *, vektori* $\vec{t}$ *i* $\vec{n}$ *odredjuju oskulatornu ravan,* M,$\vec{b}$ *i* $\vec{n}$ *normalnu ravan, a* M,$\vec{b}$ *i* $\vec{t}$ *rektifikacionu ravan krive u tački* M *krive.*

Polupřečnik krivine R *i krivina* K *su odredjeni relacijama*

$$\frac{1}{K^2} = R^2 = \frac{|\dot{\vec{r}}^2|^3}{|\dot{\vec{r}}\times\ddot{\vec{r}}|^2} \qquad \text{tj.} \quad R = \frac{|\vec{t}|^3}{|\vec{b}|}.$$

Polupřečnik torzije, ±T, *je dat formulom:*

$$T = -\frac{[\dot{\vec{r}}\times\ddot{\vec{r}}]^2}{\dot{\vec{r}}[\ddot{\vec{r}}\times\dddot{\vec{r}}]} = \frac{[\dot{\vec{r}}\times\ddot{\vec{r}}]^2}{\dddot{\vec{r}}[\dot{\vec{r}}\times\ddot{\vec{r}}]} = \frac{|\vec{b}|^2}{\dddot{\vec{r}}\cdot\vec{b}}.$$

Torziju ćemo označiti sa $\frac{1}{T}$ *. Ako je u jednačini krive parametar* t *jednak dužini luka* s *, tada je*

$$\varkappa = K = \frac{1}{R} = \left|\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\right| = |\vec{r}''|$$

a

$$-\tau = \frac{1}{T} = \pm\left|\frac{d\vec{b}_o}{ds}\right|. \qquad K = \frac{|\dot{\vec{r}}\times\ddot{\vec{r}}|}{|\dot{\vec{r}}|^3}$$

Freneovi obrasci glase:

$$\frac{d\vec{t}_o}{ds} = \frac{\vec{n}_o}{R}, \qquad \frac{d\vec{t}_o}{ds} = K\vec{n}_o$$

$$\frac{d\vec{n}_o}{ds} = -\frac{\vec{t}_o}{R} - \frac{\vec{b}_o}{T}, \qquad \frac{d\vec{n}_o}{ds} = -K\vec{t}_o+\tau\vec{b}_o$$

$$\frac{d\vec{b}_o}{ds} = \frac{\vec{n}_o}{T}. \qquad \frac{d\vec{b}_o}{ds} = -\tau\vec{n}_o$$

Obvojnica familije ravnih krivih F(x,y,a) = 0 *se dobije eliminisanjem parametra* a *iz jednačine*

$$\frac{\partial F(x,y,a)}{\partial a} = 0, \quad F(x,y,a) = 0.$$

Izabrani zadaci za vježbu (iz lekcija "Zakrivljenost i torzija krive" i "Frenet-ovi obrasci")

157. Provjerite da se Frenet-Serretove formule u matričnom obliku mogu napisati ovako:

$$\begin{bmatrix} \vec{t}^{0\prime} \\ \vec{n}^{0\prime} \\ \vec{b}^{0\prime} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \varkappa & 0 \\ -\varkappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{t}^{0} \\ \vec{n}^{0} \\ \vec{b}^{0} \end{bmatrix}.$$

158. Naći polumjer zakrivljenosti krivulje:

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t), \quad z = 4a \sin \frac{t}{2}, \quad t \in \mathbf{R}$$

Zakrivljenost ćemo računati po formuli:

$\varkappa = \dfrac{|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}|}{|\dot{\vec{r}}|^3}$, jer krivulja nije parametrizirana duljinom luka.

Imamo:

$$\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}} = a^2 \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 - \cos t & \sin t & 2\cos \frac{t}{2} \\ \sin t & \cos t & -\sin \frac{t}{2} \end{vmatrix} =$$

$$= a^2 \left[\left(-\sin t \sin \frac{t}{2} - 2\cos t \cos \frac{t}{2} \right) \vec{i} + \left(2\sin t \cos \frac{t}{2} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + (1 - \cos t) \sin \frac{t}{2} \right) \vec{j} + \left(\cos t (1 - \cos t) - \sin^2 t \right) \vec{k} \right] =$$

$$= a^2 \left[\left(-2\sin^2 \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2} - 2\cos^3 \frac{t}{2} + 2\sin^2 \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2} \right) \vec{i} + \right.$$

$$\left. + \left(4\sin \frac{t}{2} \cos^2 \frac{t}{2} + 2\sin^3 \frac{t}{2} \right) \vec{j} + (\cos t - 1)\, \vec{k} \right] =$$

$$= \left[-2\cos^3 \frac{t}{2}\, \vec{i} + \left(4\sin \frac{t}{2} \cos^2 \frac{t}{2} + 2\sin^3 \frac{t}{2} \right) \vec{j} - 2\sin^2 \frac{t}{2}\, \vec{k} \right] a^2.$$

Zatim:

$$|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}|^2 = a^4 \left[4\cos^6 \frac{t}{2} + 16\sin^2 \frac{t}{2} \cos^4 \frac{t}{2} + 16\sin^4 \frac{t}{2} \cos^2 \frac{t}{2} + 4\sin^6 \frac{t}{2} + \right.$$

$$\left. + 4\sin^4 \frac{t}{2} \right] = a^4 \left[4 \left(1 - \sin^2 \frac{t}{2} \right)^3 + 16\sin^2 \frac{t}{2} \left(1 - \sin^2 \frac{t}{2} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + 4\sin^6 \frac{t}{2} + 4\sin^4 \frac{t}{2} \right] = 4a^4 \left(1 + \sin^2 \frac{t}{2} \right).$$

Izračunajmo nazivnik:

$$|\dot{\vec{r}}|^2 = a^2 \left[(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t + 4\cos^2 \frac{t}{2} \right] = a^2 \left[2(1 - \cos t) + 4\cos^2 \frac{t}{2} \right] =$$

$$= a^2 \left[4\sin^2 \frac{t}{2} + 4\cos^2 \frac{t}{2} \right] = 4a^2.$$

Tada je $|\dot{\vec{r}}| = 2a$, $|\dot{\vec{r}}|^3 = 8a^3$.

Za polumjer zakrivljenosti dobivamo:

$$\frac{1}{\varkappa} = \frac{4a}{\sqrt{1 + \sin^2 \frac{t}{2}}}.$$

*159. Naći torziju krivulje:

$$x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad z = \frac{e^t - e^{-t}}{2}, \quad t \in \mathbf{R}.$$

Računat ćemo po formuli: $\tau = \dfrac{(\dot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}}, \dddot{\vec{r}})}{|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}|^2}$,

jer krivulja nije parametrizirana duljinom luka.
Jednadžbu krivulje možemo pisati u vektorskom obliku:

$$\vec{r} = \{\cos t,\ \sin t,\ \operatorname{sh} t\}.$$

Računajmo brojnik:

$$(\dot{\vec r}, \ddot{\vec r}, \dddot{\vec r}) = \begin{vmatrix} -\sin t & \cos t & \operatorname{ch} t \\ -\cos t & -\sin t & \operatorname{sh} t \\ \sin t & -\cos t & \operatorname{ch} t \end{vmatrix} =$$

$$= \sin^2 t \operatorname{ch} t + \sin t \cos t \operatorname{sh} t + \cos^2 t \operatorname{ch} t + \sin^2 t \operatorname{ch} t +$$
$$+ \cos^2 t \operatorname{ch} t - \sin t \cos t \operatorname{sh} t = 2 \operatorname{ch} t = e^t + e^{-t}.$$

Da bismo izračunali nazivnik, izračunajmo najprije:

$$\dot{\vec r} \times \ddot{\vec r} = \begin{vmatrix} \vec i & \vec j & \vec k \\ -\sin t & \cos t & \operatorname{ch} t \\ -\cos t & -\sin t & \operatorname{sh} t \end{vmatrix} = (\cos t \operatorname{sh} t + \sin t \operatorname{ch} t)\ \vec i +$$
$$+ (\sin t \operatorname{sh} t - \cos t \operatorname{ch} t)\ \vec j + \vec k.$$

Dalje je:

$$|\dot{\vec r} \times \ddot{\vec r}|^2 = (\cos t \operatorname{sh} t + \sin t \operatorname{ch} t)^2 + (\sin t \operatorname{sh} t + \cos t \operatorname{ch} t)^2 + 1 =$$
$$= \operatorname{sh}^2 t + \operatorname{ch}^2 t + 1 = 2 \operatorname{ch}^2 t.$$

Tada je torzija:

$$\tau = \frac{1}{\operatorname{ch} t} = \frac{2}{e^t + e^{-t}}.$$

160. Naći zakrivljenost i torziju krivulje:

$$y = \frac{x^2}{2a}, \qquad z = \frac{x^3}{6a^2}$$

u točki $x = 2a$.

Zakrivljenost i torziju izračunat ćemo po formulama:

$$\varkappa = \frac{|\dot{\vec r} \times \ddot{\vec r}|}{|\dot{\vec r}|^3}, \qquad \tau = \frac{(\dot{\vec r}, \ddot{\vec r}, \dddot{\vec r})}{|\dot{\vec r} \times \ddot{\vec r}|^2},$$

jer krivulja nije parametrizirana duljinom luka.

Krivulja ima vektorsku jednadžbu:

$$\vec r = t\ \vec i + \frac{t^2}{2a}\ \vec j + \frac{t^3}{6a^2}\ \vec k, \qquad t \in \mathbf{R},$$

a zadana točka je $T = \left(2a,\ 2a,\ \frac{4}{3}a\right)$.

Računajmo:

$$\dot{\vec r} \times \ddot{\vec r} = \begin{vmatrix} \vec i & \vec j & \vec k \\ 1 & \frac{t}{a} & \frac{t^2}{2a^2} \\ 0 & \frac{1}{a} & \frac{t}{a^2} \end{vmatrix} = \frac{t^2}{2a^3}\ \vec i - \frac{t}{a^2}\ \vec j + \frac{1}{a}\ \vec k,$$

$$|\dot{\vec r} \times \ddot{\vec r}|^2 = \frac{(t^2 + 2a^2)^2}{4a^6},$$

$$|\dot{\vec r}|^2 = \frac{(t^2 + 2a^2)^2}{4a^4},$$

$$(\dot{\vec r}, \ddot{\vec r}, \dddot{\vec r}) = \begin{vmatrix} 1 & \frac{t}{a} & \frac{t^2}{2a^2} \\ 0 & \frac{1}{a} & \frac{t}{a^2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{a^2} \end{vmatrix} = \frac{1}{a^3}.$$

Tada je:

$$\varkappa = \frac{t^2 + 2a^2}{2a^3} \cdot \left(\frac{2a^2}{t^2 + 2a^2}\right)^3 = \frac{4a^3}{(t^2 + 2a^2)^2},$$

$$\tau = \frac{1}{a^3} \cdot \frac{4a^6}{(t^2 + 2a^2)^2} = \frac{4a^3}{(t^2 + 2a^2)^2} = \varkappa.$$

U točki T je:

$$\varkappa = \frac{1}{9a}, \quad \tau = \frac{1}{9a}.$$

161. Neka se odredi funkcija $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ tako da krivulja

$$\vec r = a \cos t\ \vec i + a \sin t\ \vec j + f(t)\ \vec k, \quad t \in \mathbf{R}$$

bude ravninska.

Nuždan i dovoljan uvjet da krivulja bude ravninska jest da je torzija jednaka nuli:

$\tau = 0$, tj.

$$(\dot{\vec r}, \ddot{\vec r}, \dddot{\vec r}) = 0, \text{ odnosno: } \begin{vmatrix} \dot x & \dot y & \dot z \\ \ddot x & \ddot y & \ddot z \\ \dddot x & \dddot y & \dddot z \end{vmatrix} = 0$$

Imamo:

$$(\dot{\vec r}, \ddot{\vec r}, \dddot{\vec r}) = \begin{vmatrix} \dot x & \dot y & \dot z \\ \ddot x & \ddot y & \ddot z \\ \dddot x & \dddot y & \dddot z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -a\sin t & a\cos t & f' \\ -a\cos t & -a\sin t & f'' \\ a\sin t & -a\cos t & f''' \end{vmatrix} = 0.$$

Ovo nam daje diferencijalnu jednadžbu:

$$a^2 f' + a^2 f''' = 0, \quad \text{odnosno:} \quad f' + f''' = 0,$$

čije je rješenje:

$$f(t) = c_1 + c_2 \cos t + c_3 \sin t.$$

162. Dokazati da je krivulja:

$$\begin{aligned} x &= a_1 t^2 + b_1 t + c_1, \\ y &= a_2 t^2 + b_2 t + c_2, \\ z &= a_3 t^2 + b_3 t + c_3, \end{aligned}$$

ravninska i naći jednadžbu ravnine u kojoj ona leži.

Kako je $\dddot x = 0$, $\dddot y = 0$, $\dddot z = 0$, to je i $\dddot{\vec r} = 0$, pa je $\tau = 0$, tj. torzija je jednaka nuli. Krivulja je, dakle, ravninska. U tom slučaju ravnina u kojoj krivulja leži jest oskulaciona, i njena jednadžba glasi, u bilo kojoj točki, npr. u $t = 0$:

$$\begin{vmatrix} x - c_1 & y - c_2 & z - c_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = 0,$$

odnosno:

$$\begin{vmatrix} x - c_1 & y - c_2 & z - c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0.$$

163. Pokazati da su zakrivljenost i torzija zavojnice:

$$x = a\cos t, \quad y = a\sin t, \quad z = bt, \quad t \in \mathbf{R}$$

konstantne.

164. Naći zakrivljenost i torziju zavojnice na stošcu:

$$x = t\cos t, \quad y = t\sin t, \quad z = at, \quad t \in \mathbf{R}$$

u ishodištu koordinatnog sustava.

165. Naći zakrivljenost i torziju krivulje:

$$x = e^t, \quad y = e^{-t}, \quad z = t\sqrt{2}, \quad t \in \mathbf{R}.$$

166. Naći zakrivljenost i torziju krivulje:

$$x = 2t, \quad y = \ln t, \quad z = t^2, \quad t \in \mathbf{R}$$

u točki (2, 0, 1).

167. Ako je zakrivljenost krivulje u svakoj točki jednaka nuli, dokazati da je krivulja pravac.

168. Ako je torzija krivulje u svakoj točki jednaka nuli, dokazati da je ta krivulja ravninska.

U zadacima od 169. do 176. naći zakrivljenost i torziju.

169. $x = a\,\mathrm{ch}\,t, \quad y = a\,\mathrm{sh}\,t, \quad z = at, \quad t \in \mathbf{R}$

170. $x = 3t - t^3, \quad y = 3t^2, \quad z = 3t + t^3, \quad t \in \mathbf{R}$

171. $x = \cos^3 t, \quad y = \sin^3 t, \quad z = \cos 2t, \quad t \in [0, \pi]$,

172. $x = e^t \cos t, \quad y = e^t \sin t, \quad z = e^t, \quad t \in \mathbf{R}$

173. $\vec r = \left\{ t + \dfrac{a^2}{t}, \quad t - \dfrac{a^2}{t}, \quad 2a\ln\dfrac{t}{a} \right\}, \quad t \in \mathbf{R}$

174. $\vec r = \{\cos t, \ \sin t, \ \mathrm{ch}\,t\}$, $t \in \mathbf{R}$ u točki $t = 0$.

175. $y^2 = x$, $x^2 = z$.

176. $x^3 = 3a^2 y$, $\quad 2xz = a^2$.

177. Pokazati da su zakrivljenost i torzija krivulje:

$$\vec r = \{3t, 3t^2, 2t^3\}, \ t \in \mathbf{R},$$

proporcionalne (faktor proporcionalnosti $k = \mathrm{const.}$).

178. Naći polumjer zakrivljenosti krivulje:

$$x^2 = 2az, \quad y^2 = 2bz$$

u točki $x = a$, $y > 0$.

179. Naći polumjer zakrivljenosti i torziju krivulje:

$$x^2 - y^2 + z^2 = 1, \ y^2 - 2x + z = 0$$

u točki $M = (1, 1, 1)$, (vidi zad. 98).

180. Naći zakrivljenost i polumjer zakrivljenosti krivulje:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0, \ x + y - z = 0$$

u točki $x = 0$, $y > 0$, $z > 0$.

181. Naći za koje vrijednosti od a i b je zakrivljenost krivulje:

$$x = a\,\mathrm{ch}\,t, \ y = a\,\mathrm{sh}\,t, \ z = bt$$

u svakoj točki jednaka torziji.

182. Naći točke na krivulji:

$$x = \cos^3 t, \quad y = \sin^3 t, \quad z = \cos 2t, \quad t \in [0, \pi]$$

u kojima zakrivljenost poprima minimalnu vrijednost (lokalnu).

183. U kojim točkama polumjer zakrivljenosti krivulje:

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t), \quad z = 4a\cos\frac{t}{2}, \ t \in \mathbf{R}$$

dostiže minimum (lokalni)?

184. Pokazati da se normalna, rektifikaciona i oskulaciona ravnina krivulje

$$\vec{r} = \{ 3t,\ 3t^2,\ 2t^3 \}, \quad t \in \mathbf{R}$$

u točki maksimalne zakrivljenosti podudaraju s koordinatnim ravninama (vidi zad. 177).

185. Naći zakrivljenost i torziju krivulje $\alpha : \mathbf{R} \to E^3$:

$$\vec{r} = \{ \int f(t) \sin t \, dt, \quad \int f(t) \cos t \, dt, \quad \int f(t)\, \psi(t) \, dt \},$$

gdje su $f,\ \psi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ bar dvaput diferencijabilne.

186. Naći funkciju $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ takvu da krivulja $\alpha : \mathbf{R} \to E^3$:

$$\vec{r} = \{ \int f(t) \sin t \, dt, \quad \int f(t) \cos t \, dt, \quad \int f(t) \operatorname{tg} t \, dt \}$$

ima konstantnu zakrivljenost (f je diferencijabilna).

187. Naći funkciju $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ takvu da krivulja $\alpha : \mathbf{R} \to E^3$:

$$\vec{r} = \{ t^2,\ t,\ f(t) \}$$

bude ravninska (f je bar tri puta diferencijabilna).

U zadacima od 188. do 191. pokazati da je krivulja ravninska i naći ravninu u kojoj ona leži.

188.
$$x = 1 + 3t + 2t^2,$$
$$y = 2 - 2t + 5t^2,$$
$$z = 1 - t^2, \quad t \in \mathbf{R}.$$

189.
$$\vec{r} = \{ u^2 + 4u + 6,\ 2u^2 + 2u + 3,\ \ 5u^2 + 2u + 7 \}, \ u \in \mathbf{R}.$$

190.
$$x = \frac{1+t}{1-t}, \ y = \frac{1}{1-t^2}, \ z = \frac{t}{1+t}, \ t \in \mathbf{R}.$$

191.
$$x = a_1 t^n + b_1 t^p + c_1.$$
$$y = a_2 t^n + b_2 t^p + c_2,$$
$$z = a_3 t^n + b_3 t^p + c_3, \quad t \in \mathbf{R}.$$

(n i p su prirodni brojevi.)

192. Zadana je krivulja:

$$x^2 = 3y, \quad 2xy = 9z.$$

1° Naći polumjer zakrivljenosti te duljinu luka od točke (0, 0, 0) do točke $M = (x,\ y,\ z)$.

2° Pokazati da tangente zatvaraju konstantan kut s danim smjerom.

193. Zadana je krivulja:

$$x = a \cos t, \quad y = a \sin t, \quad z = \frac{a}{\sqrt{2}} (\sin t + \cos t), \quad t \in \mathbf{R}.$$

U točki $M(t)$ naći oskulacionu ravninu, glavnu normalu, polumjer zakrivljenosti i torziju.

194. Naći jednadžbu oskulacione ravnine, glavne normale, polumjer zakrivljenosti i torziju krivulje:

$$y = x^2, \quad z = x^3$$

u jednoj njezinoj točki.

195. 1° Ako neka ravnina siječe graf krivulje:

$$\vec{r} = \{ a_1 t,\ a_2 t^2,\ a_3 t^3 \}, \quad t \in \mathbf{R},$$

u točkama za koje je $t = t_1$, $t = t_2$ i $t = t_3$, onda je njena jednadžba:

$$a_2 a_3 (t_1 t_2 + t_2 t_3 + t_3 t_1)\ x - a_1 a_3 (t_1 + t_2 + t_3)\ y + a_1 a_2\, z - a_1 a_2 a_3\, t_1 t_2 t_3 = 0.$$

2° Koristeći 1° napisati jednadžbu oskulacione ravnine dane krivulje.

Rješenja

163. $\varkappa = \dfrac{a}{a^2 + b^2}$; $\tau = \dfrac{b}{a^2 + b^2}$.

164. $\varkappa = \dfrac{2}{1 + a^2}$; $\tau = \dfrac{3a}{2(1 + a^2)}$.

165. $\tau = -\varkappa = -\dfrac{\sqrt{2}}{(e^t + e^{-t})^2}$;

166. $\tau = -\varkappa = -\dfrac{2t}{(2t^2 + 1)^2}$; u zadanoj točki: $\tau = -\varkappa = -\dfrac{2}{9}$.

169. $\varkappa = \tau = \dfrac{1}{2a \operatorname{ch}^2 t}$.

170. $\varkappa = \tau = \dfrac{1}{3(t^2 + 1)^2}$.

171. $\varkappa = \dfrac{3}{25 \sin t \cos t}$; $\tau = \dfrac{4}{25 \sin t \cos t}$.

172. $\varkappa = \dfrac{\sqrt{2}}{3e^t}$; $\tau = \dfrac{1}{3e^t}$.

173. $\varkappa = \tau = \dfrac{at^2}{(a^2 + t^2)^2}$.

174. $\varkappa = \sqrt{2}$, $\tau = 0$.

175. $\varkappa = \dfrac{2\sqrt{1 + 36y^4 + 64y^6}}{\sqrt{(1 + 4y^2 + 16y^4)^3}}$; $\tau = -\dfrac{12y}{1 + 36y^4 + 64y^6}$.

176. $\varkappa = -\tau = \dfrac{x}{2}\left(\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{a^2}{2x^2}\right)^2$.

177. $\varkappa = \tau = \dfrac{2}{3(2t^2 + 1)^2}$.

178. $\dfrac{1}{\varkappa} = \dfrac{\sqrt{(2a + b)^3}}{\sqrt{a + b}}$.

179. $\dfrac{1}{\varkappa} = \sqrt{6}$, $\tau = 1$.

180. $2,\ -\dfrac{1}{2}$.

181. $a = b$.

182. za $t = \dfrac{\pi}{4}$.

183. za $t = 2k\pi$ $\quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

184. za $t = 0$, $\varkappa$ je maksimalna; normalna, oskulaciona i rektifikaciona ravnina glase:

$$(x - 3t) + 2t(y - 3t^2) + 2t^2(z - 2t^3) = 0,$$
$$2t^2(x - 3t) - 2t(y - 3t^2) + (z - 2t^3) = 0,$$
$$-2t(x - 3t) + (1 - 2t^2)\ (y - 3t^2) + 2t(z - 2t^3) = 0,$$

odnosno u točki $t = 0$: $x = 0$, $z = 0$, $y = 0$.

185. $\varkappa = \dfrac{1}{f}\sqrt{\dfrac{1+\psi^2+\psi'^2}{(1+\psi^2)^3}}, \qquad \tau = \dfrac{1}{f}\,\dfrac{\psi+\psi''}{1+\psi^2+\psi'^2}.$

186. $f(t) = \dfrac{1}{k}\cos t\sqrt{1+\cos^2 t}.$ **187.** $f(t) = c_1 t^2 + c_2 t + c_3.$

188. $2x+3y+19z-27=0.$ **189.** $x-3y+z-4=0.$ **190.** $x-4y-2z+3=0.$

191. $\begin{vmatrix} x-c_1 & y-c_2 & z-c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0$ (kao zad. 162).

192. Neka je jednadžba krivulje $\vec{r} = \{3t, 3t^2, 2t^3\}$

1° $\dfrac{1}{R} = \dfrac{3}{2}(2t^2+1)^2$; $s = x(2x^2+3)$;

2° Neka je zadan smjer: $\vec{a} = l\vec{i} + m\vec{j} + n\vec{k}$, a kojim tangente zatvaraju konstantni kut:

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a}\cdot\vec{r}}{|\vec{a}|\;|\vec{r}|} = \frac{3(l+2mt+2nt^2)}{3\sqrt{l^2+m^2+n^2}\sqrt{1+4t+4t^2}} = \frac{l+2mt+2nt^2}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}(2t^2+1)}.$$

Da bi $\cos\alpha$ bio konstantan, tj. da ne zavisi od t mora biti:

$$l+2mt+2nt^2 = \underbrace{k_1\sqrt{l^2+m^2+n^2}}_{\mu}(2t^2+1),$$

tj. mora biti:

$2n = 2\mu$, $2m = 0$, $l = \mu$, odnosno:

$n = \mu$, $m = 0$, $l = \mu$, pa je traženi smjer:

$\vec{a} = \mu(\vec{i}+\vec{k})$. Tada je $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, pa je konstantan kut $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$.

193. $x+y-\sqrt{2}z = 0$, oskulaciona ravnina

$$\frac{x-a\cos t}{\sin t - 3\cos t} = \frac{y-a\sin t}{\cos t - 3\sin t} = \frac{z-\dfrac{a}{\sqrt{2}}(\sin t+\cos t)}{-\sqrt{2}(\sin t+\cos t)},$$

$\dfrac{1}{\varkappa} = \dfrac{a}{4}\sqrt{(3-\sin 2t)^3}$, $\tau = 0$, pa krivulja leži u ravnini:

$x+y-\sqrt{2}Z = 0$, rj. u oskulacionoj ravnini.

194. $3t^2x - 3ty + z - t^3 = 0$ – oskulaciona ravnina,

$$\frac{x-t}{2t+9t^3} = \frac{y-t^2}{9t^4-1} = \frac{z-t^3}{9t^5-6t^4-3t}, \quad \text{glavna normala,}$$

$$\frac{1}{\varkappa} = \frac{(1+4t^2+9t^4)^{3/2}}{2(1+9t^2+9t^4)^{1/2}}, \quad \tau = \frac{3}{1+9t^2+9t^4}.$$

195. 1° Iz sustava jednadžbi:

$$\begin{aligned} Ax \quad + By \quad + Cz \quad + D &= 0 \\ Aa_1t_1 + Ba_2t_1^2 + Ca_3t_1^3 + D &= 0 \\ Aa_1t_2 + Ba_2t_2^2 + Ca_3t_2^3 + D &= 0 \\ Aa_1t_3 + Ba_2t_3^2 + Ca_3t_3^3 + D &= 0 \end{aligned}$$

Proizlazi jednadžba ravnine:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ a_1t_1 & a_2t_1^2 & a_3t_1^3 & 1 \\ a_1t_2 & a_2t_2^2 & a_3t_2^3 & 1 \\ a_1t_3 & a_2t_3^2 & a_3t_3^3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Pomnožimo ovu jednadžbu s $\dfrac{a_1a_2a_3}{a_1a_2a_3}$ množeći prvi redak s $a_1a_2a_3$, zatim dijeleći prvi stupac s a_1, drugi s a_2, treći s a_3 dobijemo:

$$\begin{vmatrix} a_2a_3x & a_1a_3y & a_1a_2z & a_1a_2a_3 \\ t_1 & t_1^2 & t_1^3 & 1 \\ t_2 & t_2^2 & t_2^3 & 1 \\ t_3 & t_3^2 & t_3^3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

odnosno:

$$\begin{aligned} &a_2a_3(t_2-t_1)(t_3-t_2)(t_3-t_1)[t_1t_2+t_1t_3+t_2t_3]\,x - \\ &-a_1a_3(t_2-t_1)(t_3-t_2)(t_3-t_1)(t_1+t_2+t_3)\,y + \\ &+a_1a_2(t_2-t_1)(t_3-t_2)(t_3-t_1)\;z - \\ &-a_1a_2a_3t_1t_2t_3(t_2-t_1)(t_3-t_2)(t_3-t_1) = 0. \end{aligned}$$

Dijelivši s $(t_2-t_1)(t_3-t_2)(t_3-t_1)$ dokazana je tvrdnja.

2° Ako u 1° stavimo za $t_2 \to t_1$ i za $t_3 \to t_1$ dobijemo:

$$3a_2a_3t_1^2x - 3a_1a_3t_1y + a_1a_2z - a_1a_2a_3t_1^3 = 0,$$

što je jednadžba ravnine u kojoj krivulja leži, pa je to prema tome oskulaciona ravnina.

§ 2. Površi u prostoru

Neka je površ data vektorskom jednačinom

$$\vec{r}(u,v) = x(u,v)\vec{i} + y(u,v)\vec{j} + z(u,v)\vec{k}$$

ili u parametarskom obliku

$$x = x(u,v), \quad y = y(u,v), \quad z = z(u,v)$$

gde je Jacobijeva matrica

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{bmatrix}$$

ranga 2. Tada je vektor normale $\vec{n}$ *na površ dat sa*

$$\vec{n} = [\vec{r}_u' \times \vec{r}_v'], \quad \vec{r}_u' = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}, \quad \vec{r}_v' = \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}$$

Ako je površ zadata jednačinom

$$F(x,y,z) = 0,$$

tada je

$$\vec{n} = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z} \right).$$

Ako je površ zadata jednačinom

tada je

$$\vec{n} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, -1 \right).$$

Jednačina tangentne ravni površi u tački M_0 *odredjenoj vektorom položaja* $\vec{r}_0$ *je*

$$(\vec{r} - \vec{r}_0)\vec{n}_{M_0} = 0.$$

Ako familija površi $f(x,y,z,a) = 0$ *ima obvojnu površ, to ona sva leži na površi* $F(x,y,z) = 0$ *koja se dobija eliminacijom parametra* a *iz jednačina*

$$f(x,y,z,a) = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial a} = 0.$$

Ako dvoparametarska površ $f(x,y,z,a,b) = 0$ *ima obvojnu površ to sve njene tačke zadovoljavaju jednačinu* $F(x,y,z) = 0$ *koja se dobija eliminacijom parametara* a *i* b *iz jednačina*

$$f(x,y,z,a,b) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial b} = 0,$$

no tu jednačinu mogu zadovoljiti i druge tačke.

Dio tablica integrala.

1. $\int u^a \mathrm{d}u = \dfrac{u^{a+1}}{a+1} + C,\ a \neq -1.$
2. $\int u^{-1}\mathrm{d}u = \int \dfrac{\mathrm{d}u}{u} = \int \dfrac{u'}{u}\mathrm{d}x = \ln|u| + C.$
3. $\int a^u \mathrm{d}u = \dfrac{a^u}{\ln|a|} + C; \int e^u \mathrm{d}u = e^u + C.$
4. $\int \sin \mathrm{d}u = -\cos u + C.$
5. $\int \cos \mathrm{d}u = \sin u + C.$
6. $\int \dfrac{1}{\cos^2 u}\mathrm{d}u = \operatorname{tg} u + C.$
7. $\int \dfrac{1}{\sin^2 u}\mathrm{d}u = -\operatorname{ctg} u + C.$
8. $\int \dfrac{\mathrm{d}u}{u^2+a^2} = \dfrac{1}{a}\operatorname{arc\,tg}\dfrac{u}{a} + C.$
9. $\int \dfrac{\mathrm{d}u}{u^2-a^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{u-a}{u+a}\right| + C.$
10. $\int \dfrac{\mathrm{d}u}{\sqrt{a^2-u^2}} = \arcsin\dfrac{u}{a} + C.$
11. $\int \dfrac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u^2+a}} = \ln|u + \sqrt{u^2+a}| + C.$

Newton-Leibnizova formula.

$$\int_a^b f(u)\mathrm{d}u = \int f(u)\mathrm{d}u\Big|_a^b = F(u)|_a^b = F(b) - F(a), \text{ gdje je } F'(u) = f(u).$$

Osobine određenih integrala.

1. $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\mathrm{d}x.$
2. $\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0.$
3. $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x.$
4. $\int_a^b [f_1(x) + f_2(x) - f_3(x)]\mathrm{d}x = \int_a^b f_1(x)\mathrm{d}x + \int_a^b f_2(x)\mathrm{d}x - \int_a^b f_3(x)\mathrm{d}x.$
5. $\int_a^b c\,f(x)\mathrm{d}x = c\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$

Smjena promjenjivih u određenom integralu.

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \left| \begin{matrix} x = \varphi(t) & x = a \Rightarrow a = \varphi(\alpha) \Rightarrow t = \alpha \\ dx = \varphi'(t)\mathrm{d}t & x = b \Rightarrow b = \varphi(\beta) \Rightarrow t = \beta \end{matrix} \right| = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta h(t)\mathrm{d}t$$

Nepravi integrali. $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x,\ \int_{-\infty}^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x, \ldots$

Računanje površine ravne figure. U zavisnosti od izgleda slike: $P = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$, $P = \int_c^d g(y)\mathrm{d}y$, $P = -\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$, $P = \int_a^b [\eta(x) - \mu(x)]\mathrm{d}x$, $P = \int_c^d [g(y) - h(y)]\mathrm{d}y$, ...

Zapremina rotacionog tijela. Ako, kriva data u parametarskom obliku $C : \begin{cases} x = \eta(t) \\ y = \mu(t) \\ t_1 \le t \le t_2 \end{cases}$ rotira oko x-ose, zapremine se računa po formuli

$$V_x = \pi\int_{t_1}^{t_2} [\mu(t)]^2|\eta'(t)|\mathrm{d}t.$$

Ista kriva ako rotira oko y-ose, $V_y = \pi\int_{t_1}^{t_2} [\eta(t)]^2|\mu'(t)|\mathrm{d}t$. Iz ove dvije formule, za funkcije $y = f(x)$ i $x = g(y)$, slijedi $V_x = \pi\int_a^b [f(x)]^2\mathrm{d}x$ i $V_y = \pi\int_c^d [g(y)]^2\mathrm{d}y$.

Tangentna ravan i normala na površ

Tangentna ravan na površ S u tački M je ravan koja prolazi kroz tačku M i ima osobinu da je rastojanje promjenjive tačke M' na površi od ove ravni kad M' teži ka M beskonačno mala veličina u poređenju sa rastojanjem MM'.

Normala površi u datoj tački površi je prava koja prolazi kroz ovu tačku i normalna je na tangentnu ravan u ovoj tački površi.

Ako je površ zadata jednačinom $F(x,y,z)=0$, tada je vektor normale $\vec{n}$ na površ dat sa

$$\vec{n}=\left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}\right).$$

Ako je površ zadata jednačinom $z=f(x,y)$ tada je

$$\vec{n}=\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, -1\right).$$

Ako je površ zadata vektorskom jednačinom

$$\vec{r}(u,v)=x(u,v)\vec{i}+y(u,v)\vec{j}+z(u,v)\vec{k}$$

ili u parametarskom obliku $x=x(u,v)$, $y=y(u,v)$, $z=z(u,v)$

tada je $\vec{n}=\vec{r}\,'_u\times\vec{r}\,'_v$ gdje je $\vec{r}\,'_u=\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}$ i $\vec{r}\,'_v=\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}$.

\# Odrediti jednačinu tangentne ravni površi S: $x=2u-v$, $y=u^2+v^2$, $z=u^3-v^3$ u tački $M_0(3,5,7)$ te površi.

Rj.

Jednačina ravni ima oblik $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$ gdje je $\vec{n}=(A,B,C)$ vektor normale, a (x_0,y_0,z_0) je tačka na ravni.

Prisjetimo se $\vec{r}=\vec{r}(u,v)$

Ako je površ data u parametarskom obliku

$$x=x(u,v)$$
$$y=y(u,v)$$
$$z=z(u,v)$$

tada je vektor normale $\vec{n}$ na površ dat sa

$$\vec{n}=\vec{r}\,'_u\times\vec{r}\,'_v,\quad \vec{r}\,'_u=\frac{\partial\vec{r}}{\partial u},\quad \vec{r}\,'_v=\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}.$$

$$\vec{r}\,'_u=(2, 2u, 3u^2)$$
$$\vec{r}\,'_v=(-1, 2v, -3v^2)$$

Odredimo parametre u i v za tačku $M_0(3,5,7)$.

$$\left.\begin{array}{l} 2u-v=3 \Rightarrow v=2u-3 \\ u^2+v^2=5 \\ u^3-v^3=7 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} u^2+(2u-3)^2=5 \\ u^3-(2u-3)^3=7 \end{array}$$

$$u^2+4u^2-12u+9=5$$
$$5u^2-12u+4=0$$
$$D=144-80=64$$

$$u_{1,2}=\frac{12\pm 8}{10}$$

$$u_1=2\quad u_2=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$$

$u=2$: $v=1$

$u^2+v^2=5$ tačno

$u^3-v^3=7$ tačno

$u=\frac{2}{5}$: $v=\frac{4}{5}-3=-\frac{11}{5}$

$u^2+v^2=\frac{4}{25}+\frac{121}{25}=5$ tačno

$u^3-v^3=\frac{8}{5^3}+\frac{1331}{5^3}\neq 7$

ovo rješenje odpada

Prema tome $u=2$, $v=1$. Za ove vrijednosti imamo

$\vec{r}'_u=(2,4,12)$

$\vec{r}'_v=(-1,2,-3)$

$$\vec{n}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 4 & 12\\ -1 & 2 & -3\end{vmatrix}=(-12-24,-(-6+12),4+4)$$

$$=(-36,-6,8)$$

$$\vec{n}=(-2)(18,3,-4)$$

Jednačina tangentne ravni je

$$18(x-3)+3(y-5)-4(z-7)=0$$

$$18x+3y-4z-41=0,$$

Dokazati da je tangentna ravan u proizvoljnoj tački površi $(x-2z)^m+(y-3z)^n=4$, $m,n\in\mathbb{N}$, paralelna pravoj $\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{1}$.

Rj: Ako je površ zadana jednačinom $F(x,y,z)=0$ tada je $\vec{n}=\left(\frac{\partial F}{\partial x},\frac{\partial F}{\partial y},\frac{\partial F}{\partial z}\right)$ vektor normale na površ.

(od ranije znamo da je $A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0$ jednačina ravni kroz tačku $M_1(x_1,y_1,z_1)$ i vektorom normale $\vec{n}=(A,B,C)$).

U našem slučaju

$$F(x,y,z)=(x-2z)^m+(y-3z)^n-4$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}=m(x-2z)^{m-1}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=n(y-3z)^{n-1}$$

$$\frac{\partial F}{\partial z}=m(x-2z)^{m-1}\cdot(-2)+n(y-3z)^{n-1}\cdot(-3)=-2m(x-2z)^{m-1}-3n(y-3z)^{n-1}$$

Vektor pravca prave $\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{1}$ je $\vec{p}=(2,3,1)$.

Tangentna ravan u proizvoljnoj tački date površi će biti sa pravom akko $\vec{p}\cdot\vec{n}=0$.

$$\vec{p}\cdot\vec{n}=2m(x-2z)^{m-1}+3n(x-2z)^{m-1}-2m(x-2z)^{m-1}-3n(y-3z)^{n-1}$$
$$=0$$

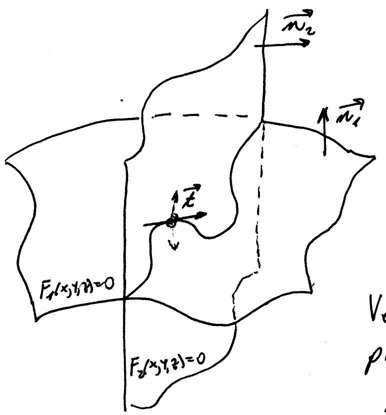
Tangentne ravni date površi su paralelne sa datom pravom.

Naći tangentu na krivu

$$\begin{cases} 2x^2+3y^2+z^2-47=F_1(x,y,z)=0 \\ x^2+2y^2-z=F_2(x,y,z)=0 \end{cases}$$

u tački $M(-2,1,6)$.

Rj. U ovom zadatku kriva je data kao presjek dvije površi. Želimo iskoristiti vektore normale $\vec{n}$ na date površi da bi našli vektor tangente



$$F_1(x,y,z)=2x^2+3y^2+z^2-47=0$$

$$\vec{n}_1=(4x,6y,2z)=2(2x,3y,z)$$

$$F_2(x,y,z)=x^2+2y^2-z=0$$

$$\vec{n}_2=(2x,4y,-1)$$

Vektor tangente na krivu u proizvoljnoj tački

$$\left.\begin{matrix}\vec{t}\perp\vec{n}_1\\ \vec{t}\perp\vec{n}_2\end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix}\vec{t}\parallel \vec{n}_1\times\vec{n}_2\\ \vec{t}=k(\vec{n}_1\times\vec{n}_2)\end{matrix}$$

gdje je k neki realan broj

$$\vec{t}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2x & 3y & z\\ 2x & 4y & -1\end{vmatrix}=(-3\overset{1}{y}-4\overset{1\cdot(6)}{yz},\ 2\overset{-2}{x}+2\overset{-2(6)}{xz},\ 2\overset{(-2)(1)}{xy})$$

U tački $M(-2,1,6)$ je $\vec{t}=(-3-24,-4-24,-4)=(-27,-28,-4)$

Jednačina tangente u tački $M(-2,1,6)$ na datu krivu je

$$\frac{x+2}{27}=\frac{y-1}{28}=\frac{z-6}{4}.$$

Dokazati ortogonalnost sljedećih površi

a) $xy=az^2$,

b) $x^2+y^2+z^2=b$,

c) $z^2+2x^2=c(z^2+2y^2)$.

Rj.

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Ako je površ zadata jednačinom } F(x,y,z)=0 \text{ tada je}\\ \text{vektor normale } \vec{n} \text{ na površ dat sa}\\ \qquad \vec{n}=\left(\frac{\partial F}{\partial x},\frac{\partial F}{\partial y},\frac{\partial F}{\partial z}\right).\end{array}}$$

Ako sa $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$ i $\vec{n}_3$ obilježimo vektore normala na površ a), b) i c) u njihovoj zajedničkoj tački $M(x,y,z)$ tada je

$$\vec{n}_1=\vec{n}_1(y,x,-2az)$$
$$\vec{n}_2=\vec{n}_2(x,y,z)$$
$$\vec{n}_3=\vec{n}_3(2x,-2cy,z-cz)$$

npr. $F_3(x,y,z)=z^2+2x^2-c(z^2+2y^2)$

$$\frac{\partial F_3}{\partial x}=4x \quad \frac{\partial F_3}{\partial y}=-4cy$$
$$\frac{\partial F_3}{\partial z}=2z-2cz$$

Pokazaćemo da su vektori $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$ i $\vec{n}_3$ uzajamno normalni što znači da su i površi ortogonalne.

$$\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2=(y,x,-2az)\cdot(x,y,z)=xy+xy-2az^2=2xy-2az^2=2(xy-az^2)$$

$$=\left|\begin{array}{l}\text{ovo je površ (a) koju je}\\ \text{pomnožimo sa 2}\\ M(x,y,z)\text{ je tačka na površi}\end{array}\right|=0$$

$$\vec{n}_1\cdot\vec{n}_3=(y,x,-2az)\cdot(2x,-2cy,z-cz)=2xy\,\underline{-2cxy}-2az^2\underline{+2acz^2}=$$

$$=2\left(xy-az^2-c(xy-az^2)\right)=2(1-c)\underbrace{(xy-az^2)}_{\text{ovo je površ a)}}=$$

$$=\left|\begin{array}{l}M(x,y,z)\text{ pripada}\\ \text{površi a)}\end{array}\right|=0$$

$$\vec{n}_2\cdot\vec{n}_3=(x,y,z)\cdot(2x,-2cy,z-cz)=\underbrace{2x^2-2cy^2+z^2-cz^2}_{\text{ovo je površ c)}}=0$$

zato što tačka $M(x,y,z)$ pripada datoj površi

S time je tvrđenje zadatka dokazano.

Pokazati da su površi: $x^2+y^2+z^2=x$, $x^2+y^2+z^2=y$ ortogonalne.

Rj.

$$x^2+y^2+z^2=x$$
$$x^2-x+y^2+z^2=0$$
$$x^2-2\cdot x\cdot\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+y^2+z^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2$$
$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2+z^2=\frac{1}{4}$$

$$x^2+y^2+z^2=y$$
$$x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2+z^2=\frac{1}{4}$$

Ovo su dvije sfere poluprečnika $\frac{1}{2}$ sa centrom u tački $A(\frac{1}{2},0,0)$ odnosno $B(0,\frac{1}{2},0)$.

Vektor normala na površi u nekoj zajedničkoj tački $M(x,y,z)$ su

$$\vec{n}_1=(2x-1,\ 2y,\ 2z)$$
$$\vec{n}_2=(2x,\ 2y-1,\ 2z)$$

Pokažimo da su vektori $\vec{n}_1$ i $\vec{n}_2$ normalni

$$\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2=4x^2-2x+4y^2-2y+4z^2=\underbrace{2(x^2-x+y^2+z^2)}_{\text{M leži na prvoj sferi}}+\underbrace{2(x^2+y^2-y+z)^2}_{\text{M leži na drugoj sferi}}=0 \quad \dots(*)$$

Tačka M leži na presječnoj liniji sfera, te njene koordinate zadovoljavaju jednačine $x^2+y^2+z^2=x$ i $x^2+y^2+z^2=y$.

Iz ovog $^{(*)}$ slijedi da su date površi ortogonalne.

Pokazati da sve tangentne ravni na površ

$$z=x\,f\left(\frac{y}{x}\right)$$

prolaze kroz stalnu tačku.

Rj. Ako je površ data jednačinom $z=f(x,y)$ tada je $\vec{n}=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},-1\right)$ vektor normale $\vec{n}$ na površ.

U našem slučaju

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f\left(\frac{y}{x}\right)+x\cdot f'\left(\frac{y}{x}\right)\cdot\left(\frac{y}{x}\right)'=f\left(\frac{y}{x}\right)+x\cdot f'\left(\frac{y}{x}\right)\cdot y\,(-1)\,x^{-2}=$$
$$=f\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{y}{x}f'\left(\frac{y}{x}\right)$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=x\cdot f'\left(\frac{y}{x}\right)\cdot\frac{1}{x}=f'\left(\frac{y}{x}\right)$$

$\vec{n}=(A,B,C)$
$A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0$

Jednačina tangentne ravni kroz neku tačku $M(x_1,y_1,z_1)$ date površi je

$$\left[f\left(\frac{y_1}{x_1}\right)-\frac{y_1}{x_1}f'\left(\frac{y_1}{x_1}\right)\right](x-x_1)+f'\left(\frac{y_1}{x_1}\right)(y-y_1)+(-1)(z-z_1)=0$$

Sad želimo iskoristiti činjenicu da je $z_1=x_1 f\left(\frac{y_1}{x_1}\right)$

$$\left[f\left(\frac{y_1}{x_1}\right)-\frac{y_1}{x_1}f'\left(\frac{y_1}{x_1}\right)\right]x+f'\left(\frac{y_1}{x_1}\right)y-z+$$
$$\underbrace{+(-x_1)f\left(\frac{y_1}{x_1}\right)}_{=-z_1}+y_1f'\left(\frac{y_1}{x_1}\right)-y_1f'\left(\frac{y_1}{x_1}\right)+z_1=0$$

$$\left[f\left(\frac{y_1}{x_1}\right)-\frac{y_1}{x_1}f'\left(\frac{y_1}{x_1}\right)\right]x+f'\left(\frac{y_1}{x_1}\right)y-z=0$$

tangentna ravan na datu površ

Odavde vidimo da sve tangentne ravni prolaze kroz koordinatni početak.

Odrediti jednačine normale i jednačinu tangentne ravni površi $z=\sqrt{169-x^2-y^2}$ u tački $(3,4,z(3,4))$.

Rj.

$z(3,4)=\sqrt{169-9-16}=\sqrt{144}=12$

$M(3,4,12)$

jednačina tangentne ravni i normale na površ $z=f(x,y)$ u tački $M(p_1,p_2,p_3)$: $z-p_3=z'_x(p_1,p_2)(x-p_1)+z'_y(p_1,p_2)(y-p_2)$

$$\frac{x-p_1}{z'_x(p_1,p_2)}=\frac{y-p_2}{z'_y(p_1,p_2)}=\frac{z-p_3}{-1}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{169-x^2-y^2}}(-2x)=\frac{-x}{\sqrt{169-x^2-y^2}} \Rightarrow z'_x(3,4)=\frac{-3}{\sqrt{169-25}}=\frac{-3}{12}=-\frac{1}{4}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{2\sqrt{169-x^2-y^2}}(-2y)=\frac{-y}{\sqrt{169-x^2-y^2}} \Rightarrow z'_y(3,4)=\frac{-4}{12}=-\frac{1}{3}$$

$z-12=-\frac{1}{4}(x-3)-\frac{1}{3}(y-4) \quad /\cdot 12$

$12z-144=-3(x-3)-4(y-4)$

$3x+4y+12z-144-9-16=0$

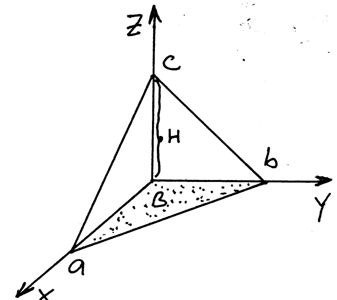
$3x+4y+12z-169=0$ jednačina tangentne ravni na površ z

$\frac{x-3}{-\frac{1}{4}}=\frac{y-4}{-\frac{1}{3}}=\frac{z-12}{-1} \quad /\cdot\left(\frac{1}{-12}\right)$

$\frac{x-3}{3}=\frac{y-4}{4}=\frac{z-12}{12}$ jednačina normale na površ z

Dokazati da tangentne ravni površi $z=\frac{1}{xy}$ tvore s koordinatnim ravnima piramide konstantne zapremine.

Rj. Jednačina tangentne ravni na površ $z=f(x,y)$ u tački $M(p_1,p_2,p_3)$: $z-p_3=z'_x(p_1,p_2)(x-p_1)+z'_y(p_1,p_2)(y-p_2)$



$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ kanonični oblik jednačine ravni gdje su a, b i c odsječci koje ravan odsjeca na koordinatnim osama

$V_{piramide}=\frac{B\cdot H}{3}=\frac{\frac{a\cdot b}{2}\cdot c}{3}=\frac{a\cdot b\cdot c}{6}$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{y}\cdot\frac{-1}{x^2}=\frac{-1}{x^2y} \Rightarrow z'_x(p_1,p_2)=\frac{-1}{p_1^2p_2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{x}\cdot\frac{-1}{y^2}=\frac{-1}{xy^2} \Rightarrow z'_y(p_1,p_2)=\frac{-1}{p_1p_2^2}$$

$p_3=f(p_1,p_2)=\frac{1}{p_1\cdot p_2}$

$$z-\frac{1}{p_1p_2}=\frac{-1}{p_1^2p_2}(x-p_1)+\frac{-1}{p_1p_2^2}(y-p_2) \quad /\cdot p_1^2p_2^2$$

$p_1^2p_2^2z-p_1p_2=-p_2(x-p_1)-p_1(y-p_2)$

$p_1^2p_2^2z+p_2x+p_2y=p_1p_2+p_1p_2+p_1p_2 \quad /\cdot\frac{1}{p_1p_2}$

$\frac{x}{p_1}+\frac{y}{p_1}+p_1p_2z=3 \quad /\cdot\frac{1}{3}$

$$\frac{x}{3p_1}+\frac{y}{3p_2}+\frac{z}{\frac{3}{p_1p_2}}=1 \Rightarrow V_{piramide}=\frac{\cancel{3}^{1}p_1\cdot 3p_2\cdot\frac{3}{p_1p_2}}{\cancel{6}\,2}=\frac{9}{2}$$

zapremina piramide za sve tangentne ravni na površ

Naći jednačinu tangentne ravni elipsoida $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ koja na koordinatnim osama odsjeca jednake pozitivne odsječke.

Rj: Jednačina tangentne ravni na površ $F(x,y,z)=0$ u tački $M(p_1,p_2,p_3)$ ima jednačinu $F'_x(p_1,p_2,p_3)(x-p_1)+F'_y(p_1,p_2,p_3)(y-p_2)+F'_z(p_1,p_2,p_3)(z-p_3)$

Nađimo jednačinu tangentne ravni na elipsoid u proizvoljnoj tački $M(p_1,p_2,p_3)$: (U našem slučaju $F(x,y,z)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1$)

$$F'_x=\frac{1}{a^2}\cdot 2x=\frac{2x}{a^2},\quad F'_y=\frac{2y}{b^2},\quad F'_z=\frac{2z}{c^2}$$

$$F'_x(M)=\frac{2p_1}{a^2},\quad F'_y(M)=\frac{2p_2}{b^2},\quad F'_z(M)=\frac{2p_3}{c^2}$$

$$\frac{2p_1}{a^2}(x-p_1)+\frac{2p_2}{b^2}(y-p_2)+\frac{2p_3}{c^2}(z-p_3)=0 \quad /\cdot\frac{1}{2}$$

$$\frac{p_1}{a^2}x+\frac{p_2}{b^2}y+\frac{p_3}{c^2}z=\frac{p_1^2}{a^2}+\frac{p_2^2}{b^2}+\frac{p_3^2}{c^2}$$

Napišimo jednačinu ravni u kanonskom obliku

$$\frac{x}{\frac{a^2}{p_1}\left(\frac{p_1^2}{a^2}+\frac{p_2^2}{b^2}+\frac{p_3^2}{c^2}\right)}+\frac{y}{\frac{b^2}{p_2}\left(\frac{p_1^2}{a^2}+\frac{p_2^2}{b^2}+\frac{p_3^2}{c^2}\right)}+\frac{z}{\frac{c^2}{p_3}\left(\frac{p_1^2}{a^2}+\frac{p_2^2}{b^2}+\frac{p_3^2}{c^2}\right)}=1$$

Odavde možemo primijetiti da ako želimo da jednačina tangentne ravni na kordanatnim osama odsjeca jednake odsječke, potrebno i dovoljno je da $\frac{a^2}{p_1}=\frac{b^2}{p_2}$, $\frac{a^2}{p_1}=\frac{c^2}{p_3}$ i $\frac{b^2}{p_2}=\frac{c^2}{p_3}$. ...(*)

Isto tako primijetimo da je $\frac{p_1^2}{a^2}+\frac{p_2^2}{b^2}+\frac{p_3^2}{c^2}=1$ ...(**) (ZAŠTO?)

$$(*) \Rightarrow p_1=\frac{a^2}{b^2}p_2,\quad p_3=\frac{c^2}{b^2}p_2 \quad ...(1)$$

Sad imamo:

$$\frac{x}{\frac{a^2}{\frac{a^2}{b^2}p_2}}+\frac{y}{\frac{b^2}{p_2}}+\frac{z}{\frac{c^2}{\frac{c^2}{b^2}p_2}}=1 \quad /:p_2$$

$$\frac{x}{b^2}+\frac{y}{b^2}+\frac{z}{b^2}=\frac{1}{p_2}$$

Kada (1) stavimo u (**) dobićemo da je $p_2=\frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

Prema tome:

$x+y+z=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ je jednačina tražene tangente

Dokazati da tangentne ravni površi $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt{a}$ $(a>0)$ odsjecaju od koordinatnih osa odsječke čiji je zbir jednak a.

Rj: Jednačina tangentne ravni na površ $F(x,y,z)=0$ u tački $M(p_1,p_2,p_3)$ ima jednačinu

$$F'_x(p_1,p_2,p_3)(x-p_1)+F'_y(p_1,p_2,p_3)(y-p_2)+F'_z(p_1,p_2,p_3)(z-p_3)=0$$

Primijetimo da ako je data kriva u ravni $F(x,y)=0$ tada jednačina tangente u tački $N(c_1,c_2)$ ima jenačinu $F'_x(c_1,c_2)(x-c_1)+F'_y(c_1,c_2)(y-c_2)=0$

npr. jednačina tangente na krivu $y=x^2+x-6$ u tački $(-3,0)$ je $y=-5x-15$.

U našem slučaju data površ je $F(x,y,z)=\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}-\sqrt{a}$.

$$F'_x=\frac{1}{2\sqrt{x}},\quad F'_y=\frac{1}{2\sqrt{y}},\quad F'_z=\frac{1}{2\sqrt{z}}$$

Uzmimo proizvoljnu tačku sa površi $M(p_1,p_2,p_3)$.

$$F'_x(p_1,p_2,p_3)=\frac{1}{2\sqrt{p_1}}=\frac{\sqrt{p_1}}{2p_1};\quad F'_y(p_1,p_2,p_3)=\frac{1}{2\sqrt{p_2}}=\frac{\sqrt{p_2}}{2p_2};\quad F'_z(p_1,p_2,p_3)=\frac{1}{2\sqrt{p_3}}=\frac{\sqrt{p_3}}{2p_3}$$

Jednačina tangentne ravni na površ u tački M

$$\frac{\sqrt{p_1}}{2p_1}(x-p_1)+\frac{\sqrt{p_2}}{2p_2}(y-p_2)+\frac{\sqrt{p_3}}{2p_3}(z-p_3)=0$$

Napišimo jednačinu u kanonskom obliku

$$\frac{\sqrt{p_1}}{2p_1}x+\frac{\sqrt{p_2}}{2p_2}y+\frac{\sqrt{p_3}}{2p_3}z=\underbrace{\frac{1}{2}\sqrt{p_1}+\frac{1}{2}\sqrt{p_2}+\frac{1}{2}\sqrt{p_3}}_{\frac{1}{2}\sqrt{a}}$$

Primijetimo da je $\sqrt{p_1}+\sqrt{p_2}+\sqrt{p_3}=\sqrt{a}$ ZAŠTO?

$/\cdot 2\ /:\sqrt{a}$

$$\frac{x}{\frac{p_1\sqrt{a}}{\sqrt{p_1}}}+\frac{y}{\frac{p_2\sqrt{a}}{\sqrt{p_2}}}+\frac{z}{\frac{p_3\sqrt{a}}{\sqrt{p_3}}}=1$$

$$\frac{x}{\sqrt{p_1 a}}+\frac{y}{\sqrt{p_2 a}}+\frac{z}{\sqrt{p_3 a}}=1$$

Jednačina tangentne ravni na x-osi odsjeca $\sqrt{a}\cdot\sqrt{p_1}$, na y-osi $\sqrt{a}\cdot\sqrt{p_2}$ i na z-osi $\sqrt{a}\cdot\sqrt{p_3}$.

Zbir ovih odsječaka iznosi

$$\sqrt{a}\sqrt{p_1}+\sqrt{a}\sqrt{p_2}+\sqrt{a}\sqrt{p_3}=\sqrt{a}(\sqrt{p_1}+\sqrt{p_2}+\sqrt{p_3})=a$$

q.e.d.

Nađite udaljenost ishodišta koordinatnog sistema od tangentne ravni (helikoida) $y = x\, tg\frac{z}{a}$ u tački $(a, a, \frac{\pi a}{4})$.

Rj. $F'_x(\rho_1,\rho_2,\rho_3)(x-\rho_1) + F'_y(\rho_1,\rho_2,\rho_3)(y-\rho_3) + F'_z(\rho_1,\rho_2,\rho_3)(z-\rho_3) = 0$

jednačina tangentne ravni na površ $F(x,y,z)=0$.

$$y - x\, tg\frac{z}{a} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -tg\frac{z}{a} \quad \Rightarrow \quad F'_x\left(a,a,\frac{\pi a}{4}\right) = -tg\frac{\frac{\pi a}{4}}{a} = -tg\frac{\pi}{4} = -1$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 1 \quad \Rightarrow \quad F'_y\left(a,a,\frac{\pi a}{4}\right) = 1$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = \frac{-x}{\cos^2\frac{z}{a}}\cdot\frac{1}{a} = \frac{-x}{a\cos^2\frac{z}{a}} \quad \Rightarrow \quad F'_z\left(a,a,\frac{\pi a}{4}\right) = \frac{-a}{a\cos^2\frac{\pi}{4}} = \frac{-1}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}$$

$$F'_z\left(a,a,\frac{\pi a}{4}\right) = -2$$

$$-1(x-a) + 1\cdot(y-a) + (-2)\left(z - \frac{\pi a}{4}\right) = 0$$

$$-x + y - 2z + a - a + \frac{\pi a}{2} = 0$$

$$-x + y - 2z + \frac{\pi a}{2} = 0$$

jednačina tangentne ravni helikoida u tački $(a, a, \frac{\pi a}{4})$.

$$d = \frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \quad O(0,0,0)$$

$$d = \frac{0+0+0+\frac{\pi a}{2}}{\sqrt{1+1+4}} = \frac{\pi a}{2\sqrt{6}}$$

udaljenost početka koordinatnog sistema od tangentne ravni

Napisati jednačinu tangentne ravni i normale na površ $2^{\frac{x}{z}} + 2^{\frac{y}{z}} = 8$ u tački $M(2,2,1)$.

Rj. Ako površ S ima jednačinu u implicitnom obliku $F(x,y,z)=0$ tada jednačina tangentne ravni i normale na površ S u tački $M(\rho_1,\rho_2,\rho_3)$ se računaju po formuli:

$$\alpha: \; F'_x(\rho_1,\rho_2,\rho_3)(x-\rho_1) + F'_y(\rho_1,\rho_2,\rho_3)(y-\rho_2) + F'_z(\rho_1,\rho_2,\rho_3)(z-\rho_3) = 0$$

$$n: \; \frac{x-\rho_1}{F'_x(\rho_1,\rho_2,\rho_3)} = \frac{y-\rho_2}{F'_y(\rho_1,\rho_2,\rho_3)} = \frac{z-\rho_3}{F'_z(\rho_1,\rho_2,\rho_3)}$$

$$2^{\frac{x}{z}} + 2^{\frac{y}{z}} = 8 \qquad \left(\frac{x}{z}\right)'_z = (xz^{-1})'_z = (-1)x\,z^{-2}$$

$$F(x,y,z) = 2^{\frac{x}{z}} + 2^{\frac{y}{z}} - 8 = 0$$

$$F'_x = 2^{\frac{x}{z}}\ln 2\cdot\frac{1}{z} \quad \Rightarrow \quad F'_x(2,2,1) = 4\ln 2$$

$$F'_y = 2^{\frac{y}{z}}\ln 2\cdot\frac{1}{z} \quad \Rightarrow \quad F'_y(2,2,1) = 4\ln 2$$

$$F'_z = 2^{\frac{x}{z}}\ln 2\cdot\left(\frac{x}{z}\right)'_z + 2^{\frac{y}{z}}\ln 2\left(\frac{y}{z}\right)'_z = -\frac{x}{z^2}2^{\frac{x}{z}}\ln 2 - \frac{y}{z^2}2^{\frac{y}{z}}\ln 2$$

$$= -\frac{1}{z^2}\ln 2\left(x2^{\frac{x}{z}} + y2^{\frac{y}{z}}\right)$$

$$F'_z(2,2,1) = -\ln 2(2\cdot 4 + 2\cdot 4) = -16\ln 2$$

$$4\ln 2(x-2) + 4\ln 2(y-2) + (-16\ln 2)(z-1) = 0$$

$$4x\ln 2 + 4y\ln 2 - 16z\ln 2 + 8\ln 2 = 0$$ jednačina tangentne ravni

$$\frac{x-2}{4\ln 2} = \frac{y-2}{4\ln 2} = \frac{z-1}{-16\ln 2} \quad \Rightarrow \quad \frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{-4}$$

jednačina normale na površ